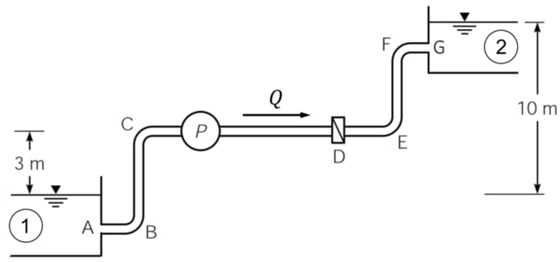
Tampereen yliopisto
YEB.031 HYDROMEKANIIKKA
Välikoe 2, 13.12.2022, ratkaisut

1. Vettä pumpataan kuvan mukaisesti säiliöstä toiseen 2 m^3/min. Putken pituus ennen pumppua on 8 m ja pumpun jälkeen 70 m; putken halkaisija on sama ennen pumppua ja pumpun jälkeen = 100 mm. Putkien ekvivalentti karheus $\varepsilon = 0.04$ mm. Kertavastuskerroin kaikille putkimutkille (4 kpl: B, C, E ja F) on $K = 0.4$; muut kertavastuskertoimet: $K_A = 0.5$, $K_D = 2$ ja $K_G = 1$. Säiliöiden pinnankorkeuksien ero on 10 m; imukorkeus on 3 m (eli alemman säiliön nestepinta on 3 m pumpun alapuolella). Veden lämpötila on 25 °C. Vedelle $\rho = 1000$ kg/m^3 ja $\mu = 8.5 \cdot 10^{-4}$ Pa s.



   (a) Määritä pumpun ottama teho, kun pumpun hyötysuhde toimintapisteessä on 85 %.
   (b) Arvioi kavitaation mahdollisuutta, kun laitetoimittajan ilmoittama $\mathrm{NPSH_R}$-arvo toimintapisteessä on 4.2 m. Ympäristön paine on 100 kPa.

Energiayhtälö (säiliöiden pinnat referenssipisteinä):

$$H_p + z_1 = z_2 + h_{L,1} + h_{L,2} \quad \rightarrow \quad H_p = \Delta z + h_{L,1} + h_{L,2} \qquad (z_2 - z_1 = \Delta z)$$

$$V_1 = V_2 = \frac{Q}{\pi D^2/4} = \frac{0.03333}{\pi \cdot (0.1)^2/4} = 4.244 \text{ m/s} = V \qquad (Q = 2/60 = 0.03333 \text{ m}^3/\text{s})$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{1000 \cdot 4.244 \cdot 0.1}{8.5 \cdot 10^{-4}} \approx 500000$$

$$\mathrm{Re} = 500000;\ \frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.04}{100} = 0.0004 \xrightarrow{\text{Moodyn käyrästö}} f \approx 0.017$$

$$h_{L,1} = \left(f\frac{L_1}{D} + \Sigma K_1\right)\frac{V^2}{2g} = \left(0.017 \cdot \frac{8}{0.1} + 1.3\right) \cdot \frac{(4.244)^2}{2 \cdot 9.81} = 2.44 \text{ m}$$

$$h_{L,2} = \left(f\frac{L_2}{D} + \Sigma K_2\right)\frac{V^2}{2g} = \left(0.017 \cdot \frac{70}{0.1} + 3.8\right) \cdot \frac{(4.244)^2}{2 \cdot 9.81} = 14.41 \text{ m}$$

$$\rightarrow\ H_p = \Delta z + h_{L,1} + h_{L,2} = 10 + 2.44 + 14.41 = 26.85 \text{ m}$$

$$\rightarrow\ \dot{W} = \frac{\rho g H_p Q}{\eta_p} = \frac{1000 \cdot 9.81 \cdot 26.85 \cdot 0.03333}{0.85} \approx 10300 \text{ W}$$

$$\mathrm{NPSH_A} = \frac{p_1 - p_v(25\,°\mathrm{C})}{\rho g} - \Delta z_{\text{pumppu}} - h_{L,1} = \frac{100000 - 3170}{1000 \cdot 9.81} - 3 - 2.44 = 4.43 \text{ m} \ \ (> 4.2 \text{ m})$$

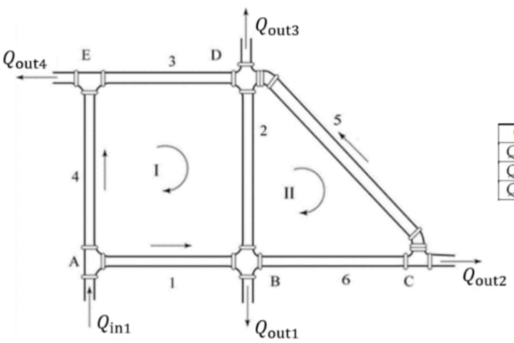
$\mathrm{NPSH_A} > \mathrm{NPSH_R}$ → ei kavitoi (käytännössä marginaalin pitäisi kuitenkin olla suurempi)

2. Seuraavalla sivulla olevan kuvan mukaiseen putkiverkkoon virtaa vettä sisään yhdestä kohdasta (solmupiste A) ja poistuu neljästä kohdasta (B – E); ks. myös taulukko kuvan yhteydessä (tilavuusvirrat annettu taulukossa yksiköllä m^3/s). Kaikkien putkien halkaisija on 50 mm. Putken 5 pituus on 50 m; muiden putkien pituus on 40 m.

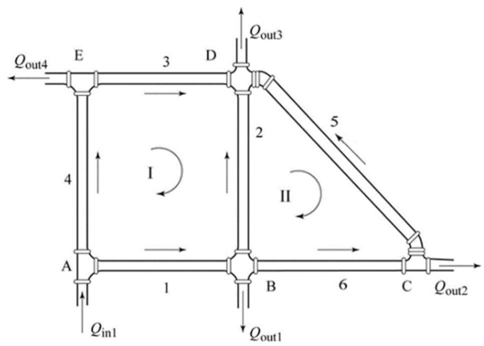
   (a) Kirjoita tarvittavat yhtälöt, jos olisit ratkaisemassa tilavuusvirtoja putkiverkossa jotakin laskentaohjelmaa (esim. Matlab, Excel, ...) käyttäen. Kirjoita yhtälöt auki; ei indeksimuodossa. Kitkakerroinyhtälöitä ei tarvitse antaa.

   (b) Kirjoita tarvittavat yhtälöt, kun tehtävää ratkaistaan Hardy-Cross -menetelmällä. Valitse putkissa 1, 4 ja 5 virtaussuunnat kuvan mukaisesti ja tilavuusvirroille alkuarvaukset Q_1 = 0.055 m^3/s, Q_4 = 0.045 m^3/s ja Q_5 = 0.002 m^3/s. Valitse itse loput virtaussuunnat ja alkuarvaukset tilavuusvirroille. Kitkakerroin voidaan olettaa vakioksi = 0.02.

   (c) Suorita yksi iteraatiokierros Hardy-Cross menetelmällä. Mitkä ovat tilavuusvirrat tämän jälkeen?



Q_{in1} =	0.10
Q_{out1} =	0.04
Q_{out2} =	0.01
Q_{out3} =	0.01



Kun otetaan huomioon annetut virtaussuunnat ja alkuarvaukset tilavuusvirroille kolmessa putkessa (1, 4, ja 5), muiden putkien virtaussuuntien täytyy olla yllä oikealla olevan kuvan mukaiset, jotta jatkuvuusyhtälöt voisivat toteutua.

$Q_{out4} = Q_{in1} - Q_{out1} - Q_{out2} - Q_{out3}$ = 0.1 – 0.04 – 0.01 – 0.01 = 0.04 m^3/s

(a)

Jatkuvuusyhtälöt solmupisteille: $\Sigma Q_i = 0$

Piste A: $Q_{in1} - Q_1 - Q_4 = 0$

Piste B: $Q_1 - Q_2 - Q_6 - Q_{out1} = 0$

Piste C: $Q_6 - Q_5 - Q_{out2} = 0$

Piste D: $Q_3 + Q_2 + Q_5 - Q_{out3} = 0$

(Piste E: $Q_4 - Q_3 - Q_{out4} = 0$) (yksi jatkuvuusyhtälö, mikä tahansa, täytyy jättää pois)

Energiayhtälöt silmukoille: $\Sigma h_{L,i} = 0$

$h_{L,4} + h_{L,3} - h_{L,2} - h_{L,1} = 0$

$h_{L,2} - h_{L,5} - h_{L,6} = 0$

missä $h_{L,i} = f \dfrac{L_i}{D_i} \dfrac{|V_i| V_i}{2g} = \dfrac{8 f_i L_i}{g \pi^2 D_i^5} |Q_i| Q_i \quad \left(V_i = \dfrac{Q_i}{\pi D_i^2 / 4} \right)$

(b) Hardy-Cross

Kirjoitetaan painehäviöt muodossa: $h_{L,i} = r_i Q_i^n$

f = vakio $\longrightarrow$ $r_i = \dfrac{8 f_i L_i}{g\pi^2 D_i^5}$; $n = 2$

$$r_5 = \frac{8 \cdot 0.02 \cdot 50}{9.81 \cdot \pi^2 \cdot (0.05)} = 264406$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_6 = \frac{8 \cdot 0.02 \cdot 40}{9.81 \cdot \pi^2 \cdot (0.05)} = 211525$$

Hardy-Cross -menetelmän korjaustermi jokaiselle silmukalle:

$$\Delta Q = -\frac{\Sigma r_i Q_i |Q_i|^{n-1}}{\Sigma n r_i |Q_i|^{n-1}} \xrightarrow{n=2} \Delta Q = -\frac{\Sigma r_i Q_i\, |Q_i|}{\Sigma 2 r_i\, |Q_i|}$$

Tilavuusvirtojen alkuarvaukset (jatkuvuusyhtälöiden täytyy toteutua solmupisteissä):

$Q_3 = 0.005$ m^3/s; $Q_2 = 0.003$ m^3/s; $Q_6 = 0.012$ m^3/s (Q_1, Q_4 ja Q_5 annettu lähtötietona)

(c) Korjauksen suorittaminen

Silmukoiden korjaustermeiksi 1. iterointikierroksella tulee:

$$\Delta Q_{\mathrm{I}} = -\frac{211525 \cdot 0.045 \cdot |0.045| + 211525 \cdot 0.005 \cdot |0.005| + 211525 \cdot (-0.003) \cdot |-0.003| + 211525 \cdot (-0.055) \cdot |-0.055|}{2 \cdot (211525 \cdot |0.045| + 211525 \cdot |0.005| + 211525 \cdot |-0.003| + 211525 \cdot |-0.055|)}$$

$$= -\frac{(-208.14)}{45689.4} = 0.00456$$

$$\Delta Q_{\mathrm{II}} = -\frac{211525 \cdot 0.003 \cdot |0.003| + 264406 \cdot (-0.002) \cdot |0.002| + 211525 \cdot (-0.012) \cdot |-0.012|}{2 \cdot (211525 \cdot |0.003| + 264406 \cdot |-0.002| + 211525 \cdot |-0.012|)}$$

$$= -\frac{(-29.614)}{7403.37} = 0.004$$

Korjatut tilavuusvirrat 1. iterointikierroksen jälkeen:

$Q_1 = 0.055 - (0.00456) = 0.05044$ m^3/s

$Q_2 = 0.003 - (0.00456) + (0.004) = 0.002444$ m^3/s

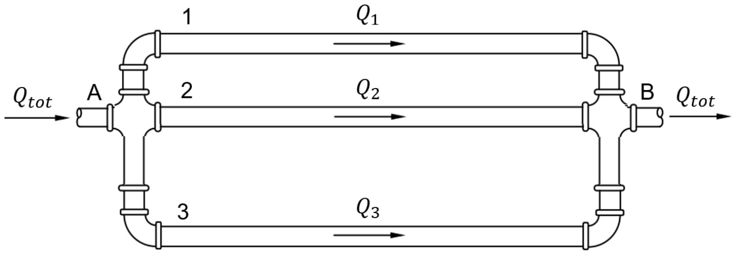
$Q_3 = 0.005 + (0.00456) = 0.00956$ m^3/s

$Q_4 = 0.045 + (0.00456) = 0.04956$ m^3/s

$Q_5 = 0.002 - (0.004) = -0.002$ m^3/s (virtaussuunta muuttui)

$Q_6 = 0.012 - (0.004) = 0.008$ m^3/s

3. Virtaus haarautuu kuvan mukaisesti kolmeen putkeen ja yhdistyy sitten jälleen. Putkien pituudet, halkaisijat ja karheudet on annettu taulukossa, kuten myös kertavastusten summat eri putkille. Määritä painehäviö pisteiden A ja B välillä (eli $p_A - p_B$ [kPa]) sekä kokonaistilavuusvirta, Q_{tot}. Tilavuusvirta putken 3 kautta on: $Q_3 = 0.02$ m³/s. Vedelle: $\rho = 1000$ kg/m³, $\nu = 1 \cdot 10^{-6}$ m²/s.



Pipe	L (m)	D (mm)	ε (mm)	ΣK
1	120	100	0.6	3
2	90	100	0.6	2
3	150	100	0.6	3.5

Putki 3:

$$\mathrm{Re}_3 = \frac{4Q_3}{\nu\pi D_3} = \frac{4 \cdot 0.02}{1 \cdot 10^{-6} \cdot \pi \cdot 0.1} = 254648; \quad \frac{\varepsilon_1}{D_1} = \frac{0.6}{100} = 0.006$$

Moodyn käyrästöstä havaitaan, että suhteellisen karheuden arvolla $\varepsilon/D = 0.006$ täysin turbulentti alue alkaa suunnilleen Reynoldsin luvusta 200000. Putken 3 kohdalla virtaus on siis täysin turbulentilla alueella, jolloin kitkakerroin ei riipu lainkaan Reynoldsin luvusta. Koska kaikkien putkien halkaisijat ovat samat ja putki 3 on pisin ja sillä on myös suurin kertavastusten summa, voidaan päätellä, että putkissa 1 ja 2 tilavuusvirta ja täten myös Reynoldsin luku on suurempi kuin putkessa 3. Täten myös putkien 1 ja 2 kohdalla virtaus on täysin turbulentilla alueella. Kitkakerroin on siis sama kaikille putkille; Moodyn käyrästöstä saadaan: $f_1 = f_2 = f_3 \approx 0.032$.

$$h_{L3} = \left(f_3 \frac{L_3}{D_3} + \Sigma K_3\right) \frac{8}{g\pi^2 D_3^4}\, Q_3^2 = \left(0.032 \cdot \frac{150}{0.1} + 3.5\right) \cdot \frac{8}{9.81 \cdot \pi^2 \cdot (0.1)^4} \cdot (0.02)^2 = 17.02 \text{ m}$$

Putket ovat rinnakkain, jolloin: $h_{L1} = h_{L2} = h_{L3} = 17.02 \text{ m} = h_L$

$\rightarrow \Delta p = \rho g h_L = 1000 \cdot 9.81 \cdot 17.02 = 167000 \text{ Pa} \approx 167 \text{ kPa}$

Tilavuusvirrat putkissa 1 ja 2:

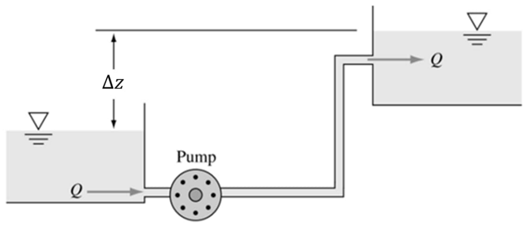
$$h_L = \left(f_1 \frac{L_1}{D_1} + \Sigma K_1\right) \frac{8}{g\pi^2 D_1^4}\, Q_1^2 = 34208\, Q_1^2 \;\rightarrow\; Q_1 = \left(\frac{17.02}{34208}\right)^{1/2} = 0.0223 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$h_L = \left(f_2 \frac{L_2}{D_2} + \Sigma K_2\right) \frac{8}{g\pi^2 D_2^4}\, Q_2^2 = 25449\, Q_2^2 \;\rightarrow\; Q_2 = \left(\frac{17.02}{25449}\right)^{1/2} = 0.0259 \text{ m}^3/\text{s}$$

$\rightarrow Q_{tot} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0.0223 + 0.0259 + 0.02 = 0.0682 \text{ m}^3/\text{s}$

4. Pumpun ominaiskäyrä (nostokorkeus vs. tilavuusvirta) pyörimisnopeudella 1000 rpm (kierrosta minuutissa) on:

   H_p[m] = 50 – 1000Q^2 ([Q] = m³/s)

   Säiliöiden pinnankorkeuksien ero $\Delta z = 20$ m, putken halkaisija 150 mm ja kokonaispituus 80 m.
   Kitkakertoimelle voi käyttää arvoa $f = 0.023$;
   kertahäviöitä ei tarvitse ottaa huomioon. Vedelle $\rho = 1000$ kg/m³.

   Osoita, että toimintapisteessä pumpun nostokorkeus $H_p \approx 40$ m.

   Tilavuusvirtaa halutaan kasvattaa 25 % ($Q_2 = 1.25Q_1$) pumpun pyörimisnopeutta suurentamalla. Määritä uusi pyörimisnopeus ja nostokorkeus.

$H_{syst} = \Delta z + h_L$

$$h_L = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = f\frac{L}{D}\frac{(Q/A)^2}{2g} = f\frac{L}{D}\frac{\left(\frac{Q}{\pi D^2/4}\right)^2}{2g} = \frac{8fL}{g\pi^2 D^5}Q^2 = \frac{8\cdot 0.023\cdot 80}{9.81\cdot\pi^2\cdot(0.15)^5}Q^2 = 2002.1\,Q^2$$

$\rightarrow H_{syst} = 20 + 2002.1\,Q^2$

$H_p[\mathrm{m}] = 50 - 1000\,Q^2$

$H_{syst} = H_p \rightarrow 20 + 2002.1\,Q^2 = 50 - 1000\,Q^2 \rightarrow Q = 0.09997\ \mathrm{m^3/s} = 0.1\ \mathrm{m^3/s}$

$\rightarrow H_p[\mathrm{m}] = 50 - 1000\cdot(0.1)^2 = 40\ \mathrm{m}$

$Q_2 = 1.25\,Q_1 = 1.25\cdot 0.1 = 0.125\ \mathrm{m^3/s}$

$\rightarrow H_{syst2} = H_{p2} = 20 + 2002.1\,Q^2 = 20 + 2002.1\cdot(0.125)^2 = 51.3$ m (systeemikäyrä ei muutu)

$$\frac{Q}{N} = \text{vakio} \rightarrow \frac{Q_1}{N_1} = \frac{Q_2}{N_2} \rightarrow Q_1 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)Q_2$$

$$\frac{H_p}{N^2} = \text{vakio} \rightarrow \frac{H_{p1}}{N_1^2} = \frac{H_{p2}}{N_2^2} \rightarrow H_{p1} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 H_{p2}$$

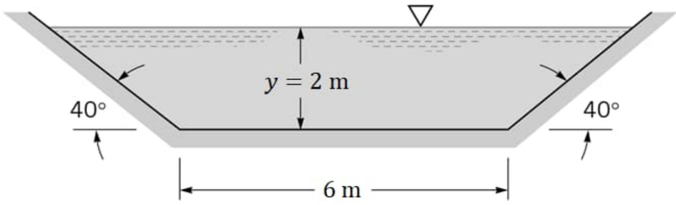
Pumpun ominaiskäyrä pyörimisnopeudella N_2:

$$H_{p1} = 50 - 1000\,Q_1^2 \rightarrow \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 H_{p2} = 50 - 1000\left[\left(\frac{N_1}{N_2}\right)Q_2\right]^2 = 50 - 1000\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Q_2^2$$

$$\rightarrow H_{p2} = 50\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 - 1000\,Q_2^2$$

$$\rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \left(\frac{H_{p2} + 1000\,Q_2^2}{50}\right)^{1/2} = \left[\frac{51.3 + 1000\cdot(0.125)^2}{50}\right]^{1/2} = 1.157 \longrightarrow N_2 = 1157\ \mathrm{rpm}$$

5. Laske tilavuusvirta kuvan mukaisessa symmetrisessä avokanavassa, kun Manningin karheuskerroin $n = 0.014$ ja pituuskaltevuus $S = 0.002$. Muut tiedot on annettu kuvassa.



Mikä voisi korkeintaan olla pituuskaltevuus S, jotta virtaus pysyisi alikriittisenä (oletetaan, että $y = 2$ m ei muutu).

$$A = 6 \cdot 2 + 2 \cdot \left(\frac{2}{\tan(40)}\right) = 6 \cdot 2 + 2 \cdot 2.384 = 16.77 \text{ m}^2$$

$$P = 6 + 2 \cdot \sqrt{(2)^2 + (2.384)^2} = 12.22 \text{ m}$$

$$R_h = \frac{A}{P} = \frac{16.77}{12.22} = 1.373 \text{ m}$$

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} S^{1/2}$$

$$\longrightarrow \; Q = \frac{1}{0.014} \cdot 16.77 \cdot (1.373)^{2/3} \cdot (0.002)^{1/2} = 66.2 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{g y_h}} \;\longrightarrow\; V = \text{Fr}\sqrt{g y_h}$$

$$b_s = 6 + 2 \cdot 2.384 = 10.77 \text{ m}$$

$$y_h = \frac{A}{b_s} = \frac{16.77}{10.77} = 1.557 \text{ m}$$

$$\text{Fr} = 1 \;\longrightarrow\; V = 1 \cdot \sqrt{9.81 \cdot 1.557} = 3.908 \text{ m/s}$$

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S^{1/2}$$

$$\longrightarrow \; S = \left(\frac{nV}{R_h^{2/3}}\right)^2 = \left[\frac{0.014 \cdot 3.908}{(1.373)^{2/3}}\right]^2 = 0.00196$$