73040 VEKTORIANALYYSI (K,Te,Tu,M,R,Tj,Y)

1. VÄLITENTTI 17.10.2002

Laita jokaiseen vastauspaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ja koulutusohjelmasi. Tehtäväpaperin saat pitää. Kaavakokoelma paperin kääntöpuolella.

Oikeat ratkaisut ilmoitustaululla heti tentin jälkeen ja tulokset syysloman jälkeen.

---

1. Laske käyrien $xy = 2$, $xy = 4$, $xy^2 = 3$ ja $xy^2 = 6$ rajoittaman, xy-tason 1. neljänneksessä sijaitsevan alueen pinta-ala.
Vihje: käytä muunnosta $u = xy, \quad v = xy^2$.

2. Laske onton pallon

$$S = \{(x, y, z): \quad 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$$

massa, kun massatiheys on $\rho(x, y, z) = |z|$.

3. Käyrä C alkaa pisteestä (0,0) ja kulkee suoraan pisteeseen (1,-1). Tämän jälkeen kuljetaan pitkin origokeskisen ympyrän kaarta vastapäivään positiiviselle y-akselille ja palataan sitten y-akselia pitkin origoon. Olkoon $\mathbf{F} = (-x^2y, \quad x^3 + 4xy^2)$. Laske

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

Vihje: 2 erilaista ratkaisutapaa, (vastaukseksi riittää yhdellä tavalla ratkaistu tehtävä). Eräässä ratkaisutavassa saattaa olla hyötyä kaavoista:

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)), \quad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)).$$

73040 Vektorianalyysin kaavoja 2000

1. $$\iint_{R_{xy}} f(x,y)\,dxdy = \iint_{R_{uv}} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

2. $$\begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \rho^2\sin\phi$$

3. $$\int_C f(\mathbf{r})\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$$

4. $$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\bullet d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\bullet\mathbf{T}(\mathbf{r})\,ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\bullet\mathbf{r}'(t)\,dt$$

5. $$\oint_{\partial R} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \oint_{\partial R} f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) da$$

6. $$\oint_{\partial R} \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,ds = \iint_R \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) da$$

7. $$\iint_S f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{R_{uv}} f(\mathbf{r}(u,v))\|\mathbf{r}_u(u,v)\times\mathbf{r}_v(u,v)\|\,dudv$$

8. $$\iint_S f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{R_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\,dxdy$$

9. $$\iint_S \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_{R_{uv}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\bullet\mathbf{r}_u(u,v)\times\mathbf{r}_v(u,v)\,dudv$$

10. $$\iint_S \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_{R_{xy}} \mathbf{F}(x,y,z(x,y))\bullet\left(-z_x, -z_y, 1\right)\,dxdy$$

11.
- **(i)** $\nabla\times\nabla h = \mathbf{0}$
- **(ii)** $\nabla\bullet(\nabla\times\mathbf{F}) = 0$
- **(iii)** $\nabla\bullet(h\mathbf{F}) = \nabla h\bullet\mathbf{F} + h\nabla\bullet\mathbf{F}$
- **(iv)** $\nabla\times(h\mathbf{F}) = \nabla h\times\mathbf{F} + h\nabla\times\mathbf{F}$
- **(v)** $\nabla(\mathbf{F}\bullet\mathbf{G}) = \mathbf{F}\times(\nabla\times\mathbf{G}) + \mathbf{G}\times(\nabla\times\mathbf{F}) + (\mathbf{F}\bullet\nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G}\bullet\nabla)\mathbf{F}$
- **(vi)** $\nabla\bullet(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\bullet(\nabla\times\mathbf{F}) - \mathbf{F}\bullet(\nabla\times\mathbf{G})$
- **(vii)** $\nabla\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla\bullet\mathbf{G}) - (\mathbf{F}\bullet\nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G}\bullet\nabla)\mathbf{F} - \mathbf{G}(\nabla\bullet\mathbf{F})$
- **(viii)** $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F}) = \nabla(\nabla\bullet\mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$

12. $$\oiint_S \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_R \nabla\bullet\mathbf{F}\,dv$$

13. $$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_0^1 t\,\mathbf{F}\left(\mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\right)\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,dt$$

14. $$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left(\int_{z_0}^{z} f_2(x,y,z)\,dz - \int_{y_0}^{y} f_3(x,y,z_0)\,dy,\ -\int_{z_0}^{z} f_1(x,y,z)\,dz,\ 0\right)$$

15. $$\oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\bullet\mathbf{n}\,d\sigma$$

16. $$u(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$$