

73030 Insinöörimatematiikka 1 Tentti 20.12.2004

Ei omia taulukoita, kirjallisuutta, muistiinpanoja, laskimia.

Kirjoita papereihin nimi, opiskelijanumero, koulutusohjelma ja luentoryhmä.

Luentoryhmäsi on se, jonka opetukseen/välitentteihin olet osallistunut syksyllä 2004.

Jos et ole ollut mukana opetuksessa, valitse oman koulutusohjelmasi luentoryhmä.

Merkitse selvästi myös, mitä välitenttiä ja/tai loppudenttiä suoritat.

Loppudentti: Valitse 5 tehtävää luentoryhmäsi välitentteistä siten, että jokaisesta luentoryhmäsi välitentistä tulee vähintään yksi tehtävä.

Välitenttehtävät valitaan seuraavan taulukon mukaan.

Luentoryhmä	1. välitentti	2. välitentti	3. välitentti	4. välitentti
Ti (Kaarakka)	2,9	5,6(a,c)	3,10	7,8
K,Te,Tu (Lehto)	1,11	2,5	6(b,d),12	3,8
M,R,Y (Vattulainen)	1,2	3,4	5,6(a,b)	7,8
S,Au,Tj,Tle (Vehmanen)	1(a,c),2	5,6(a,b)	3,12	7,8

1. a) Mikä on funktion $f(x)$ laajin määrittelyjoukko \mathbb{R} :ssä

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^x}$$

b) Voidaanko $f(x)$ määrittellä jatkuvaksi koko \mathbb{R} :-ssä, eli voidaanko $f(x)$ lisämäärittämisellä saada jatkuvaksi kohdissa, joissa sitä ei ole määritetty.

c) $f(x)$ on bijektio. Laske $f^{-1}(-1)$

2. Mitä ovat $\sinh(x)$ ja $\cosh(x)$, kun $\tanh(x) = -1/2$

3. Laske

$$\int \cos(\ln(x)) dx$$

4. Käyrä $f(x) = 1/x$, $x \in [1, \infty)$, pyörrähtää x-akselin ympäri. Laske pyörrähdyskappaleen tilavuus ja pinta-ala.

5. Määritä kompleksilukuja $z_1 = e^{j\pi/3}$, ja $z_2 = e^{j\pi/4}$ hyväksikäyttäen tarkat arvot luvuille $\sin(\frac{\pi}{2})$ ja $\cos(\frac{\pi}{2})$ Vihje: Mitä on z_1/z_2 muodossa $re^{j\theta}$

6. Suora l_1 kulkee pisteiden $(2, 1, 1)$ ja $(4, 3, 3)$ kautta.

Suora l_2 kulkee pisteiden $(-1, 0, -2)$ ja $(3, 0, 2)$ kautta.

Suora l_3 on parametrimuodossa esitettynä $(1, 1, 1) + t(2, 0, -1)$, $t \in \mathbb{R}$

a) Määritä suorien l_1 ja l_2 leikkauspiste.

b) Suorat l_1 ja l_2 ovat samalla tasolla. Määritä tason yhtälö muodossa $ax + by + cz + d = 0$.

c) Suorat l_1 ja l_2 ovat samalla tasolla. Määritä tason yhtälö parametrimuodossa.

d) Määritä b- tai c-kohdassa määritellyn tason ja suoran l_3 leikkauspiste.

7. Määritä $F'(t)$ käyttäen usean muuttujan funktion ketjusääntöä, kun

$$F(t) = f(x, y, t) = x^2 + y + e^t$$

$$x = x(y) = y^2$$

$$y = y(t) = 1/t$$

8. Ympyrälierion muotoisen säilyketökin tilavuus on 100. Mikä on astian pohjan säde ja astian korkeus, kun minimoidaan astian pinta-ala. Käytä Lagrangen kertojamenetelmää.

9. Todista induktiolla, että $\forall n \in \mathbb{N}$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

10. Laske asteroidin $r(t) = (b \cos^3 t, b \sin^3 t)$ kaaren pituus, kun $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ ja sen pyörrähdyskappaleen pinta-ala, joka syntyy, kun ko. käyrä pyörrähtää x-akselin ympäri.

11. Yhtälö $x^3 + y^3 = 6xy$ määrittelee impliittisesti funktion eräässä pisteessä $(3, 3)$ ympäristössä. Laske $y'(3)$ ja $y''(3)$.

12. Tarkastele funktioita

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} - 1 \quad \text{ja} \quad g(x, y) = \frac{xy \cos(y)}{3x^2 + y^2}$$

Osoita, että toisella näistä ei ole raja-arvoa origossa ja laske toisen raja-arvo origossa.

Kääntöpuolella kaavoja ja tuloksia, joista voi olla apua.