TTKK/Koneosasto
Teknillinen mekaniikka

T1/23610/00S

23610 YLEINEN ELEMENTTIMENETELMÄ

Syksy 2000

TENTTI Pe 15.12.2000 EI KIRJALLISUUTTA.

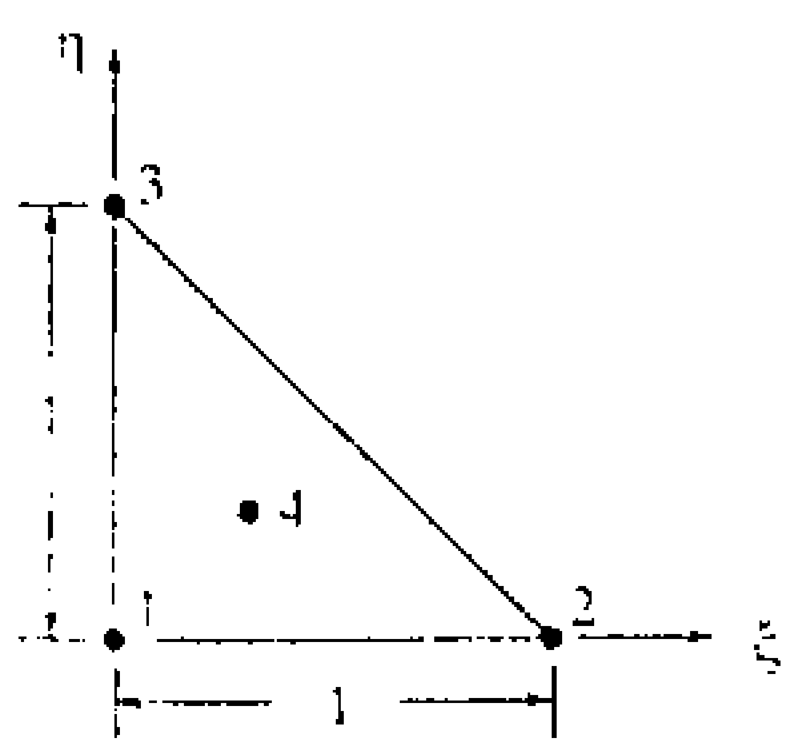
---

1. Johda alla esitetylle osittaisdifferentiaaliyhtälölle FEM-formulaatio, eli määritä differentiaaliyhtälön ratkaisuun sopivan elementin $\mathbf{K}^{(e)}$-matriisi sekä $\mathbf{F}^{(e)}$-vektori yleisessä muodossa. (Muotofunktioita ei siis tarvitse kirjoittaa auki). Elementin solmujen lukumäärän voit päättää itse. Käytä joko Galerkinin painotettujen jäännösten menetelmää tai variaatiomenetelmää.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=C \qquad ;(x,y)\in\Omega, \qquad (C = \text{vakio})$$

$$f=\hat{f} \qquad (x,y)\in\Gamma$$

Miten annetut reunaehdot huomioidaan FEM-formulaatiossa? Miten tilanne muuttuisi, jos reunaehtona olisikin annettu $\dfrac{\partial f}{\partial n}=g; \quad (x,y)\in\Gamma$? Tässä n tarkoittaa kentän reunan normaalin suuntaa.



2. Määritä ohessa esitetylle C^0-kolmioelementille muotofunkiot $N_i(L_1,L_2,L_3)$. Solmu 4 on kolmion painopisteessä. Totea lisäksi, että muotofunktiot saavat arvon 1 omassa solmussaan, ja arvon 0 muissa solmuissa.

3. Johda entalpian derivaatan approksimaatio-lausekkeet

a) $$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T}\approx\frac{1}{2}\left(\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x}}{\dfrac{\partial T}{\partial x}}+\frac{\dfrac{\partial H}{\partial y}}{\dfrac{\partial T}{\partial y}}\right),$$

b) $$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T}\approx\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x}\dfrac{\partial T}{\partial x}+\dfrac{\partial H}{\partial y}\dfrac{\partial T}{\partial y}}{\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial T}{\partial y}\right)^2}$$

Miten käyttäisit näitä approksimaatioita muodostaessasi faasimuutoksen huomioivaa elementtiä? Lähde faasimuutostehtävän kenttäyhtälöstä ja esitä yksityiskohtaisesti minkälaiseen FEM-formulaation päädyt, ja miten sitä käytät.

Arvostelu: 8 pistettä / tehtävä.

TTKK/Koneosasto
Teknillinen mekaniikka
23610 YLEINEN ELEMENTTIMENETELMÄ
Syksy 2000

KK/23610/00S

Kaavakokoelma

$$\int_{\Omega} R W_{\mathrm{i}} \mathrm{d}\Omega = 0, \qquad \frac{\partial I^{(e)}}{\partial \phi_{\mathrm{i}}^{(e)}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial \phi_x}\right) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \phi_{xx}}\right) - \quad \cdots \quad (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\partial F}{\partial \phi_{x^n}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial N_{\mathrm{i}}}{\partial \xi} = \frac{\partial N_{\mathrm{i}}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\mathrm{i}}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}, \qquad \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \det(\mathbf{J})\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$\phi(\xi,\eta) = \mathbf{N}(\xi,\eta)\boldsymbol{\phi}^{(e)}, \qquad x(\xi,\eta) = \mathbf{N}(\xi,\eta)\mathbf{x}^{(e)}, \qquad y(\xi,\eta) = \mathbf{N}(\xi,\eta)\mathbf{y}^{(e)}$$

$$N_{\alpha\beta\gamma}(L_1, L_2, L_3) = N_\alpha(L_1)N_\beta(L_2)N_\gamma(L_3)$$

$$N_\alpha(L) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{\alpha}\left(\dfrac{nL - i + 1}{i}\right), & \alpha \geq 1 \\ 1, & \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\int_{\Omega} u(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma} u(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla u \mathrm{d}\Omega$$

$$W_{\mathrm{i}} = N_{\mathrm{i}} + \alpha \widetilde{W}_{\mathrm{i}}, \qquad \int_{\Omega^{(e)}} \widetilde{W}_{\mathrm{i}} \mathrm{d}x = \pm\frac{h}{2},$$

$$\alpha_{crit} = 1 - \frac{1}{|Pe|}, \qquad \alpha_{opt} = \coth|Pe| - \frac{1}{|Pe|}, \qquad Pe = \frac{vh}{2k}$$

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \nabla \cdot k \nabla T$$ (energy conservation equation for phase change problems)