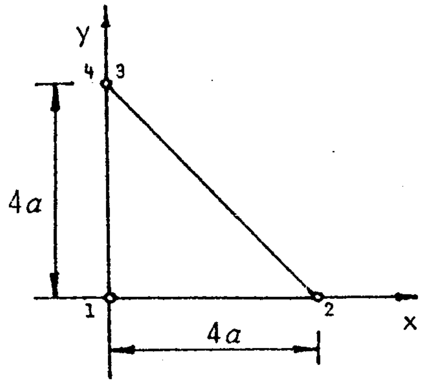
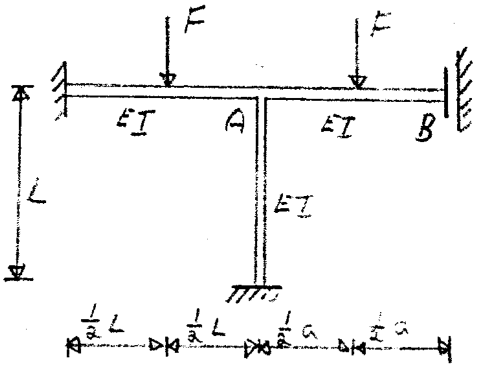
TTKK/Teknillinen mekaniikka ja optimointi
23591 ELEMENTTIMENETELMÄN PERUSTEET
2. välikoe 17.12.2001

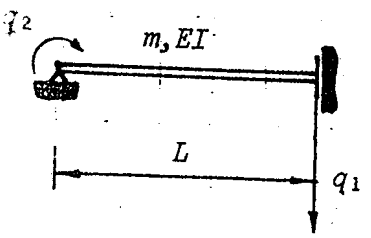



1. Emoneliö kuvataan lineaarisesti oheisen kuvan kolmiolle. $N_i = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)$. Esitä kuvausfunktiot $x = x(\xi,\eta)$ ja $y = y(\xi,\eta)$. Laske Jacobin matriisi $[J]$ ja $\det[J]$. Tutki onko kuvaus singulaarinen vai ei. Piirrä kuvaelementtiin koordinaattiviivat $\xi = 0$ ja $\eta = 0$.

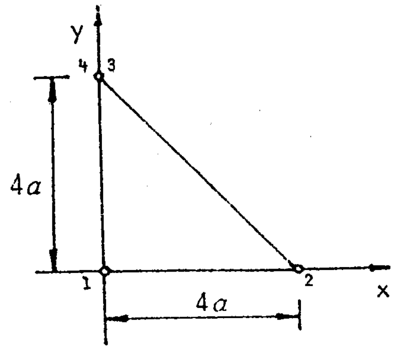
2. Laske Gaussin yhden, kahden ja kolmen pisteen integrointia käyttäen integraali $I = \int_0^4 e^{-3x}dx$. Vertaa tulosta tarkkaan arvoon.




3. Määritä oheisen tasokehän mitta $a$ siten, että kiertymä pisteessä A on nolla. Määritä lisäksi palkin AB taivutusmomenttijakautuma. Kohdassa B on luistituki, joka sallii vain pystysuuntaisen translaatioliikkeen.

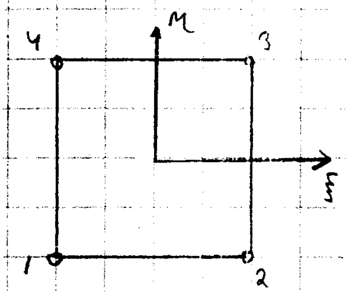



4. Tarkastellaan oheista toisesta päästä niveltuettua ja toisesta päästä luistituettua palkkia. Määritä palkin ominaiskulmataajuudet käyttäen yhtä palkkielementtiä. Käytä sekä konsistenttia että keskitettyä massamatriisia ja vertaa tuloksia.




1. Emoneliö kuvataan lineaarisesti oheisen kuvan kolmiolle. $N_i = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)$. Esitä kuvausfunktiot $x = x(\xi,\eta)$ ja $y = y(\xi,\eta)$. Laske Jacobin matriisi $[J]$ ja $\det[J]$. Tutki onko kuvaus singulaarinen vai ei. Piirrä kuvaelementtiin koordinaattiviivat $\xi = 0$ ja $\eta = 0$.

Ratkaisu.




$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$
$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$
$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$x = \sum N_i \hat{x}_i = N_1 \cdot 0 + N_2 \cdot 4a + N_3 \cdot 0 + N_4 \cdot 0 = \underline{\underline{a(1+\xi)(1-\eta)}}$$
$$y = \sum N_i \hat{y}_i = N_1 \cdot 0 + N_2 \cdot 0 + N_3 \cdot 4a + N_4 \cdot 4a =$$
$$= a(1+\xi)(1+\eta) + a(1-\xi)(1+\eta) = \underline{\underline{2a(1+\eta)}}$$

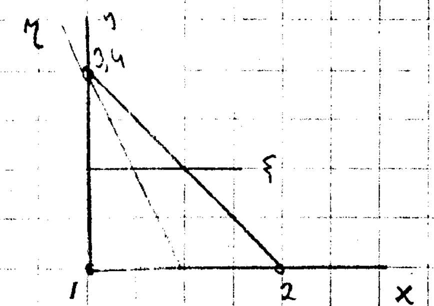
$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = a(1-\eta) \qquad \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = -a(1+\xi) \qquad \frac{\partial y}{\partial \eta} = 2a$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} a(1-\eta) & 0 \\ -a(1+\xi) & 2a \end{bmatrix}}}$$

$$\det[J] = \underline{\underline{2a^2(1-\eta)}}$$

$\det[J] = 0$ kun $\eta = 1$ eli pisteessä $(0, 4a)$



2. Laske Gaussin yhden, kahden ja kolmen pisteen integrointia käyttäen integraali $I = \int_0^4 e^{-3x} dx$. Vertaa tulosta tarkkaan arvoon.

Ratkaisu

Tarkka $\quad I = \int_0^4 e^{-3x} dx = \Big/_0^4 -\frac{1}{3} e^{-3x} = -\frac{1}{3}\left(e^{-12} - 1\right) = \underline{\underline{0{,}333331}}$

muuttujan vaihto

$$I = \int_0^4 e^{-3x} dx = \int_{-1}^{1} e^{-3x(\xi)} \frac{dx}{d\xi} d\xi \qquad x(\xi) = 2(1+\xi) \quad \frac{dx}{d\xi} = 2$$

$$x(-1) = 0 \qquad x(1) = 4$$

$$I = \int_{-1}^{1} 2e^{-6(1+\xi)} d\xi$$

Gauss, 1 piste $\quad I = w_1 \phi_1$

$$I = 2 \cdot 2 e^{-6(1+0)} = 4e^{-6} = \underline{\underline{0{,}009915}}$$

virhe $\quad \dfrac{0{,}009915 - 0{,}333331}{0{,}333331} = -97{,}0\ \%$

Gauss, 2 pistettä $\quad I = w_1 \phi_1 + w_2 \phi_2$

$$I = 2e^{-6(1-0{,}57735)} + 2e^{-6(1+0{,}57735)} =$$

$$= 0{,}158381 + 0{,}000155 = \underline{\underline{0{,}158536}}$$

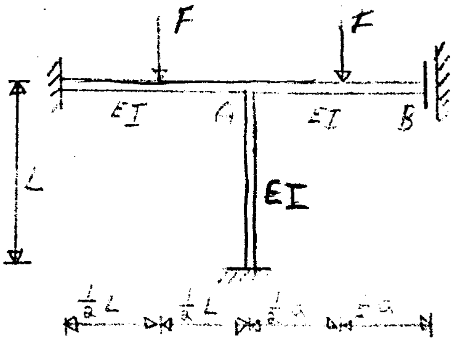
virhe $\; -52{,}4\ \%$

Gauss, 3 pistettä

$$I = 0{,}555556 \cdot 2e^{-6(1-0{,}774597)} + 0{,}888889 \cdot 2e^{-6} + 0{,}555556 \cdot 2e^{-6(1+0{,}774597)}$$

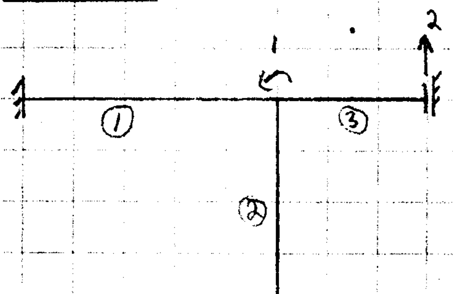
$$= 0{,}287349 + 0{,}004407 + 0{,}000026 = \underline{\underline{0{,}291782}}$$

virhe $\; -12{,}5\ \%$




3. Määritä oheisen tasokehän mitta $a$ siten, että kiertymä pisteessä A on nolla. Määritä lisäksi palkin AB taivutusmomenttijakautuma. Kohdassa B on luistituki, joka sallii vain pystysuuntaisen translaatioliikkeen.

Ratkaisu




$$[k^{(1)}] = [k^{(2)}] = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

$$[k^{(3)}] = \frac{EI}{a^3}\begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 12 & 6a & -12 & 6a \\ 6a & 4a^2 & -6a & 2a^2 \\ -12 & -6a & 12 & -6a \\ 6a & 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \end{array}$$

$$[K] = EI\begin{bmatrix} \frac{4}{L} + \frac{4}{L} + \frac{4}{a} & -\frac{6}{a^2} \\ -\frac{6}{a^2} & \frac{12}{a^3} \end{bmatrix}$$

ekvivalenttiset solmukuormitukset

$$\{R\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8}FL - \frac{1}{8}Fa \\ -\frac{1}{2}F \end{bmatrix}$$

$$[K]\{Q\} = \{R\}$$

$$EI\begin{bmatrix} \frac{8}{L} + \frac{4}{a} & -\frac{6}{a^2} \\ -\frac{6}{a^2} & \frac{12}{a^3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \frac{F}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{4}L - \frac{1}{4}a \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \frac{F}{2EI\,\det[\,]}\begin{bmatrix} \frac{12}{a^3} & \frac{6}{a^2} \\ \frac{6}{a^2} & \frac{8}{L} + \frac{4}{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{4}L - \frac{1}{4}a \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{F}{2EI\,\det[\,]}\begin{bmatrix} 3\frac{L}{a^3} - 3\frac{1}{a^2} - 6\frac{1}{a^2} \\ \frac{3}{2}\frac{L}{a^2} - \frac{3}{2}\frac{1}{a} - 8\frac{1}{L} - 4\frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

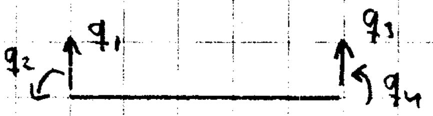
ehto $Q_1 = 0 \Rightarrow 3\frac{L}{a^3} - 9\frac{1}{a^2} = 0$

$$3L - 9a = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{1}{3}L}}$$

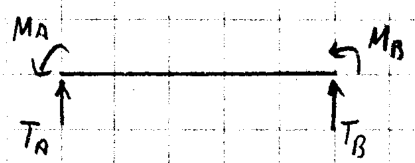
$$\det[\ ] = \begin{vmatrix} \frac{8}{L} + \frac{4}{a} & -\frac{6}{a^2} \\ -\frac{6}{a^2} & \frac{12}{a^3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & -54 \\ -54 & 324 \end{vmatrix} \frac{1}{L^4} = 3564\frac{1}{L^4}$$

$$\Rightarrow Q_2 = \frac{FL^3}{7128EI}\left(\frac{27}{2} - \frac{9}{2} - 8 - 12\right) = -\frac{FL^3}{648EI} = -\frac{Fa^3}{24EI}$$

Palkki AB

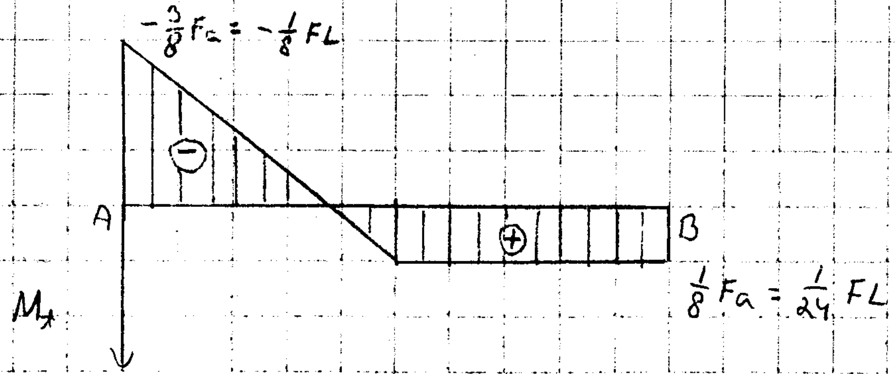


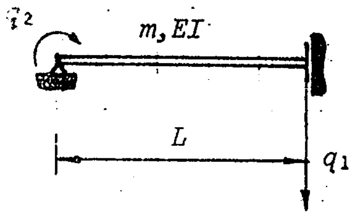

$$\{f\} = [k]\{q\} - \{r\}$$




$$\begin{bmatrix} T_A \\ M_A \\ T_B \\ M_B \end{bmatrix} = \frac{EI}{a^3}\begin{bmatrix} 12 & 6a & -12 & 6a \\ 6a & 4a^2 & -6a & 2a^2 \\ -12 & -6a & 12 & -6a \\ 6a & 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}F \\ -\frac{1}{8}Fa \\ -\frac{1}{2}F \\ \frac{1}{8}Fa \end{bmatrix}$$

$$= \frac{EI\,Q_2}{a^3}\begin{bmatrix} -12 \\ -6a \\ 12 \\ -6a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}F \\ \frac{1}{8}Fa \\ \frac{1}{2}F \\ -\frac{1}{8}Fa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ \frac{3}{8}Fa \\ 0 \\ \frac{1}{8}Fa \end{bmatrix}$$






4. Tarkastellaan oheista toisesta päästä niveltuettua ja toisesta päästä luistituettua palkkia. Määritä palkin ominaiskulmataajuudet käyttäen yhtä palkkielementtiä. Käytä sekä konsistenttia että keskitettyä massamatriisia ja vertaa tuloksia.

Ratkaisu

$$[k^{(e)}] = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 0 & 2 & -1 & 0 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{array} \end{array}$$

$$[K] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & +6L \\ +6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$[m^{(e)}] = \frac{m}{420}\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 0 & 2 & -1 & 0 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ \text{symm.} & & & 4L^2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{array} \end{array}$$

$$[M] = \frac{m}{420}\begin{bmatrix} 156 & -13L \\ -13L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$\det\left[\,[K] - \lambda[M]\,\right] = 0$$

$$\begin{vmatrix} 12\frac{EI}{L^3} - \frac{156}{420}m\lambda & +6\frac{EI}{L^2} + \frac{13}{420}mL\lambda \\ +6\frac{EI}{L^2} + \frac{13}{420}mL\lambda & 4\frac{EI}{L} - \frac{4}{420}mL^2\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\mu = \frac{mL^3\lambda}{420\,EI}$$

$$\left(\frac{EI}{L^3}\right)\begin{vmatrix} 12 - 156\mu & 6L + 13L\mu \\ 6L + 13L\mu & 4L^2 - 4L^2\mu \end{vmatrix} = 0$$

$$48L^2 - 48L^2\mu - 624L^2\mu + 624L^2\mu^2 - 36L^2 - 156L^2\mu - 169L^2\mu^2 = 0 \quad /:L^2$$

$$455\mu^2 - 828\mu + 12 = 0$$

$$\mu = \frac{828 \pm \sqrt{828^2 - 4 \cdot 12 \cdot 455}}{2 \cdot 455} = \begin{cases} 1{,}805 \\ 0{,}01461 \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{420\,EI}{mL^3}\mu = \begin{cases} 758{,}17 \ \frac{EI}{mL^3} \\ 6{,}136 \ \frac{EI}{mL^3} \end{cases}$$

$$\omega = \sqrt{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 2{,}48\sqrt{\frac{EI}{mL^3}} \qquad \omega_2 = 27{,}53\sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$$

keskitetty massamatriisi

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\left[[K] - \lambda[M]\right] = 0$$

$$\left(\frac{EI}{L^3}\right)^2 \begin{vmatrix} 12 - \frac{1}{2}m\lambda & 6L \\ 6L & 4L^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \mu_1 = \frac{mL^3\lambda}{EI}$$

$$48L^2 - 2L^2\mu_1 - 36L^2 = 0$$

$$\mu_1 = 6$$

$$\lambda = 6\frac{EI}{mL^3} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2{,}45\sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$$

tarkat arvot $\quad \omega_1 = 2{,}468\sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$

$\qquad\qquad\qquad \omega_2 = 22{,}20\sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$