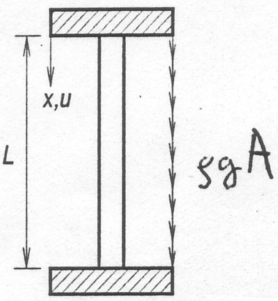
TAMPEREEN TEKNILLINEN KORKEAKOULU
K-osasto/TME

23591 ELEMENTTIMENETELMÄN PERUSTEET — 1/23591/98s
Esa Murtola

Tentti 21.12.1998 3 h

Muistiinpanojen tai kirjallisuuden käyttö <u>ei ole</u> sallittua.
Laskin ja taulukkokirja OK.

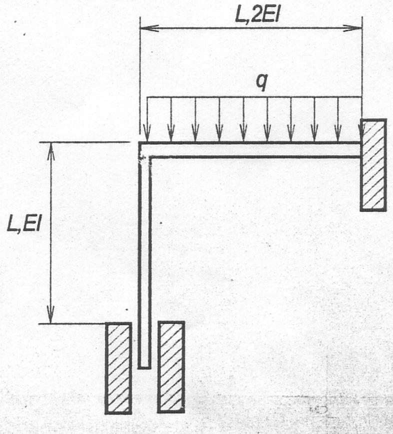


1. Oheisen kuvan mukainen oman painovoimansa kuormittama, pystysuora, tasapaksu ja homogeeninen sauva on tuettu siirtymättömästi molemmista päistään.

   a) Muodosta rakenteen potentiaalienergian lauseke $\Pi(u)$ ja valitse yksi kinemaattisesti käypä kantafunktio sauvan siirtymäkentälle.

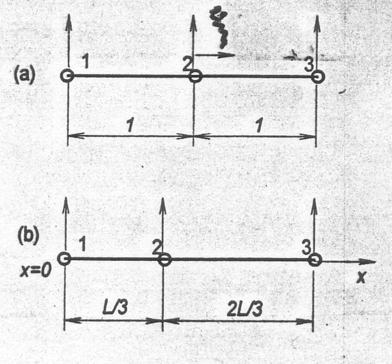
   b) Ratkaise sauvan siirtymä $u(x)$ Rayleigh-Ritzin menetelmällä sekä sauvan normaalivoima $N(x)$. Piirrä menetelmän ratkaisun mukainen vapaakappalekuva sauvasta.

   Sauvan poikkileikkaus on A, materiaalin tiheys ρ sekä kimmomoduuli E .



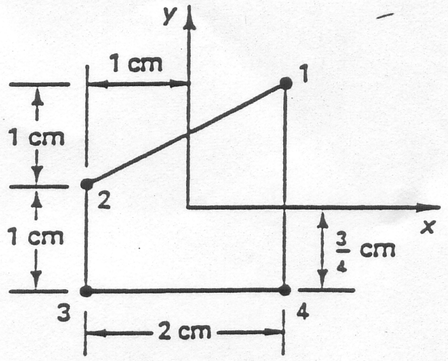
2. a) Muodosta oheisen kehärakenteen kahden vapausasteen laskentamallin jäykkyysmatriisi $[K]$ sekä kuormitusvektori $\{R\}$, kun palkin pituusakselin suuntaisia muodonmuutoksia ei huomioida.

   b) Ratkaise kehän nurkkapisteen solmusiirtymät sekä palkkien taivutusmomenttikuviot.



3. a) Muodosta kuvan (b) 3-solmuisen palkkielementin jäykkyysmatriisin laskentaan tarvittavat matriisit $[B]$ ja $[E]$ vastaavan emoelementin (a) avulla, kun solmuvapausasteina ovat palkin pystysiirtymät .

   b) Laske jäykkyysmatriisin alkio k_{13} , kun palkin poikkipinta-ala A, neliömomentti I ja materiaalin kimmomoduuli E ovat vakioita.



4. Bilineaarinen neliöemo kuvataan oheisen muotoiseksi elementiksi xy-tasoon.

   a) Laske emoelementin origon koordinaatit kuvan koordinaatistossa ja piirrä kuvaan ξ – ja η - akselit.

   b) Laske a) kohdassa ratkaisemasi pisteen muodonmuutokset, kun solmujen 1, 2 ja 3 solmusiirtymät ovat nollia ja solmun 4 solmusiirtymät ovat $u_4 = \delta$ ja $v_4 = \dfrac{\delta}{2}$.

5. Valitse oheisista väitteistä se, joka on mielestäsi paras.

Jos kahden eri solmusiirtymämittauksen välillä on voimassa kinemaattinen yhtälö

$\{\underline{\hat{u}}\} = [B]\{\hat{u}\}$ niin vastaavien solmumittausjärjestelmien mukaisten jäykkyysmatriisien välillä on

yhteys;

a) $[k] = [B]^{\mathrm{T}}[\underline{k}]$

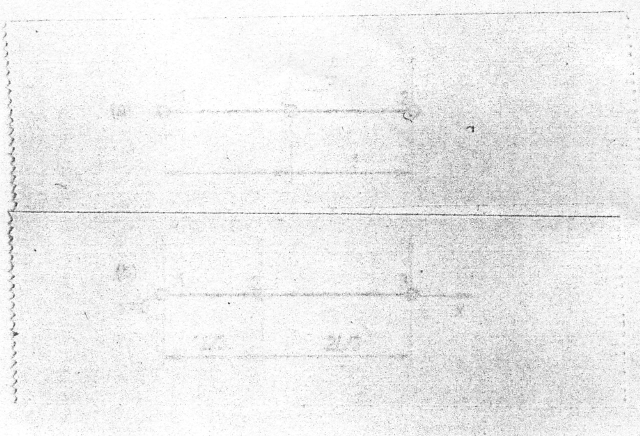
b) $[\underline{k}] = [B]^{\mathrm{T}}[k]$

c) $[k] = [B]^{\mathrm{T}}[\underline{k}][B]$

d) $[k] = [B][\underline{k}][B]^{\mathrm{T}}$

e) $[k] = [B][k]^{\mathrm{T}}[B]$

Oikeasta vastauksesta saa +2 , väärästä -1 ja tyhjästä 0 pistettä.



1/3

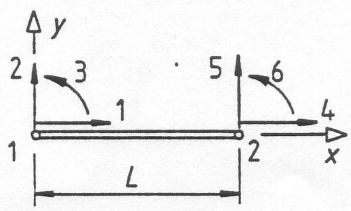
23591 ELEMENTTIMENETELMÄN-PERUSTEET

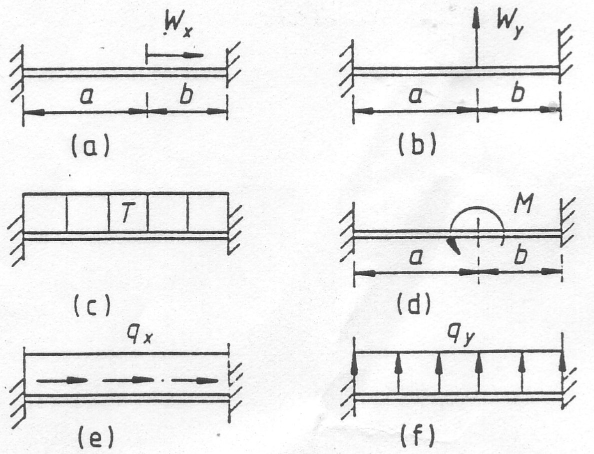
kaavakokoelma tenttiin

$$[E] = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\nu} \end{bmatrix} \qquad \bar{\nu} = \frac{1-2\nu}{2}$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,r} \\ w_{,z} \\ u/r \\ u_{,z} + w_{,r} \end{bmatrix} = [D]\{u\}$$

$$\{\hat{u}^i\} = \{w_i,\ \beta_{xi},\ \beta_{yi},\ \beta_{xyi}\}$$





$$\{\hat{r}\} = -\{\bar{r}\}$$
$$\bar{a} = a/L$$
$$\bar{b} = b/L$$

Kuorm. tapaus	Ekvivalenttisen solmukuormituksen komponentit $\hat{r}_i$					
	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5	i = 6
a	$W_x\bar{b}$	0	0	$W_x\bar{a}$	0	
b	0	$W_y(1+2\bar{a})\bar{b}^2$	$W_y a\bar{b}^2$	0	$W_y(1+2\bar{b})\bar{a}^2$	$-W_y b\bar{a}^2$
c	$-EA\alpha T$	0	0	$EA\alpha T$	0	0
d	0	$-M6\bar{a}\bar{b}/L$	$M(1-3\bar{a})\bar{b}$	0	$M6\bar{a}\bar{b}/L$	$M(1-3\bar{b})\bar{a}$
e	$q_xL/2$	0	0	$q_xL/2$	0	0
f	0	$q_yL/2$	$q_yL^2/12$	0	$q_yL/2$	$-q_yL^2/12$

$$[k] = \iiint\limits_{V^{(e)}} [B]^T[E][B]\, dV$$

$$\{\hat{r}\} = \iiint\limits_{V^{(e)}} [N]^T\{f\}\, dV + \iint\limits_{S^{(e)}} [N]^T\{p\}\, dS$$

$$\begin{bmatrix} \{\hat{\underline{F}}^e_a\} \\ \{\hat{\underline{F}}^e_c\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\underline{k}^e_{aa}] & [\underline{k}^e_{ac}] \\ [\underline{k}^e_{ca}] & [\underline{k}^e_{cc}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\hat{\underline{u}}^e_a\} \\ \{\hat{\underline{u}}^e_c\} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \{\hat{\underline{r}}^e_a\} \\ \{\hat{\underline{r}}^e_c\} \end{bmatrix}$$

$$\{{}^*\hat{\underline{u}}^e\} \equiv \{\hat{\underline{u}}^e_a\}$$

$$\{{}^*\hat{\underline{F}}^e\} \equiv \{\hat{\underline{F}}^e_a\} - [\underline{k}^e_{ac}][\underline{k}^e_{cc}]^{-1}\{\hat{\underline{F}}^e_c\}$$

$$\{{}^*\hat{\underline{r}}^e\} \equiv \{\hat{\underline{r}}^e_a\} - [\underline{k}^e_{ac}][\underline{k}^e_{cc}]^{-1}\{\hat{\underline{F}}^e_c\}$$

$$[{}^*\underline{k}^e] \equiv [\underline{k}^e_{aa}] - [\underline{k}^e_{ac}][\underline{k}^e_{cc}]^{-1}[\underline{k}^e_{ca}]$$

$$\{{}^*\hat{\underline{F}}^e\} = [{}^*\underline{k}^e]\{{}^*\hat{\underline{u}}^e\} - \{{}^*\hat{\underline{r}}^e\}$$

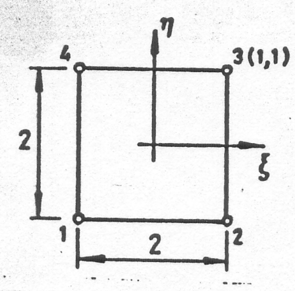
Order n	Location ξ_i	Weight W_i
1	0.	2.
2	±0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
3	±0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55556
	0.00000 00000 00000	0.88888 88888 88889
4	±0.86113 63115 94053	0.34785 48451 37454
	±0.33998 10435 84856	0.65214 51548 62546
5	±0.90617 98459 38664	0.23692 68850 56189
	±0.53846 93101 05683	0.47862 86704 99366
	0.00000 00000 00000	0.56888 88888 88889
6	±0.93246 95142 03152	0.17132 44923 79179
	±0.66120 93864 66265	0.36076 15730 48139
	±0.23861 91860 83197	0.46791 39345 72691

$$E \rightarrow \frac{E}{1-\nu^2}$$

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\nu} \end{bmatrix} \qquad \bar{\nu} = \frac{1-\nu}{2}$$

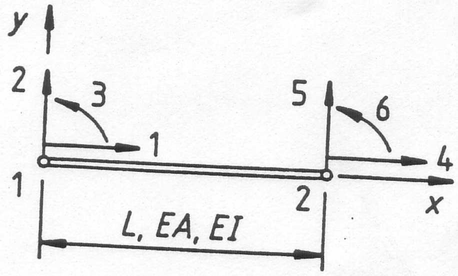
$$\nu \rightarrow \frac{\nu}{1-\nu}$$

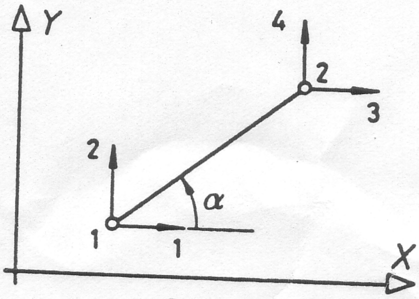
2/3



$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$	$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$
$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$	$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$

$$[k] = k\begin{bmatrix} [Q] & -[Q] \\ -[Q] & [Q] \end{bmatrix} \qquad [Q] = \begin{bmatrix} cc & cs \\ cs & ss \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} c = \cos\alpha \\ s = \sin\alpha \\ k = EA/L \end{array}$$





$$[k] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} k & 0 & 0 & -k & 0 & 0 \\ & 12\kappa/L^2 & 6\kappa/L & 0 & -12\kappa/L^2 & 6\kappa/L \\ & & 4\kappa & 0 & -6\kappa/L & 2\kappa \\ \hline & & & k & 0 & 0 \\ & & & & 12\kappa/L^2 & -6\kappa/L \\ & & & & & 4\kappa \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

$k = EA/L$

$\kappa = EI/L$

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\overline{EA}\, u_{,x}^2 + \alpha\, \overline{GA}\, \gamma_{xy}^2 + \overline{EI}\, v_{,xx}^2 + G\overline{I}_v\, \Theta^2\right] dx$$

$$N_1 = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$N_2 = L\left[\left(\frac{x}{L}\right) - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right]$$

$$N_3 = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$N_4 = L\left[-\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right]$$

$$\phi_{,\xi} = \phi_{,x}\, x_{,\xi} + \phi_{,y}\, y_{,\xi}$$

$$\phi_{,\eta} = \phi_{,x}\, x_{,\eta} + \phi_{,y}\, y_{,\eta}$$

$$\iint_A L_1^\alpha L_2^\beta L_3^\gamma \, dA = 2A\,\frac{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma+2)!} = \frac{A^*}{B^*}\,A$$

$$\left[\begin{array}{c|c} [K_{ff}] & [K_{fc}] \\ \hline [K_{cf}] & [K_{cc}] \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \{\hat{\mathcal{U}}_f\} \\ \hline \{\hat{\mathcal{U}}_c\} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \{\hat{R}_f\} \\ \hline \{\hat{R}_c\} \end{array}\right]$$

$$\{\hat{\mathcal{U}}_f\} = [K_{ff}]^{-1}\{\hat{R}_f\} - [K_{ff}]^{-1}[K_{fc}]\{\hat{\mathcal{U}}_c\}$$

$$\{\hat{R}_c\} = [K_{cf}]\{\hat{\mathcal{U}}_f\} + [K_{cc}]\{\hat{\mathcal{U}}_c\}$$