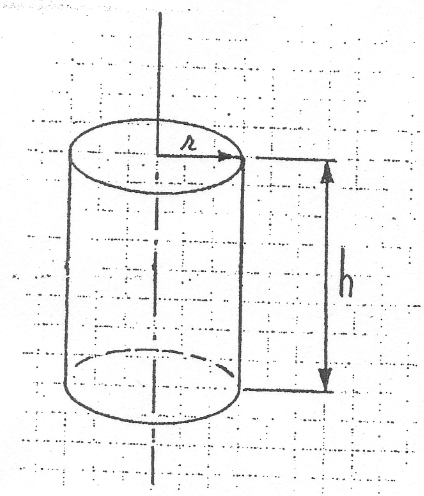
Ti 25.11.03
JK

BONUS 3

optimoinnin perusteet



1) Tehtävänä on suunnitella ympyräsylinterin muotoinen muki, jonka erikoiskäsittelyä vaativa vaippamateriaali on kallista. Ohutseinäisen mukin, jonka korkeus h ja säde r eivät saa ylittää 20 cm, tilavuus olisi saatava mahdollisimman suureksi. Lisäksi sylinterin säteen r täytyy olla vähintään 5 cm ja vaippapinnan ala ei saa ylittää 900 cm^2. Halpaa pohjamateriaalia ei tarvitse ottaa laskelmissa huomioon. Muodosta kyseinen optimointiongelma käyttäen suunnittelumuuttujina mittoja h ja r. Ratkaise tehtävä graafisesti.
Tutki kohdefunktion konveksisuutta Hessen matriisin avulla. Onko ongelma konveksi?

2) Ratkaise allaoleva optimointiongelma Lagrangen funktion avulla ja osoita, että ratkaisu toteuttaa myös riittävät ääriarvoehdot

$\underline{y}^T H_L \underline{y} > 0 \quad \forall \underline{y} \neq 0$, jotka tot. ehdot $\nabla g_i^T \underline{y} = 0$ akt. rej. ehdoille.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

a) max $f(\underline{x})$

$$-1 \le x_1, x_2, x_3 \le 1$$

b) min $f(\underline{x})$

$$x_1 + x_2 \ge 1$$
$$-x_1 + x_2 \ge 1$$

Onko ongelma konveksi? Piirrä kuvaan kaikki suunnat $\underline{y}$, jotka toteuttavat ehdon $\nabla g_i^T \underline{y} = 0$ jossakin lokaalissa minimissä.

TEHTÄVÄ 3)

a) Ongelmassa min $f(\underline{x})$ on derivoituva funktio $f(\underline{x})$ konveksi. Sen lokaali optimi on $\underline{x}^*$, joka on laskettu ehdosta $\nabla f(\underline{x}^*) = \underline{0}$. Voiko olla niin, että $\underline{x}^*$ ei ole globaali optimi? (perustele)
Entä voiko olla muita pisteitä $\underline{x} \neq \underline{x}^*$, jotka ovat ongelman globaaleja optimeja. (kuva) 2p.

b) Miten käy tavallisesti kohdefunktion optimiarvon f^*, jos suunnittelumuuttujien lukumäärää lisätään? Ongelma on min $f(\underline{x})$. Havainnollista asiaa yhden ja kahden muuttujan tapauksessa ($x \rightarrow x_1$ ja x_2) kuvan avulla. Milloin f^* säilyy samana? 2p.

c) Kun halutaan maksimoida funktio $f(\underline{x})$, voidaan sen tilalla minimoida funktio $g(\underline{x}) = -f(\underline{x})$. Esitä joku toisen tyyppinen valinta funktiolle $g(\underline{x})$. 2p.

$\max f(\underline{x}) \rightarrow \min g(\underline{x}) \qquad g(\underline{x}) = ? \qquad (f(\underline{x}) > 0)$

d) Optimointiongelmalla on n suunnittelumuuttujaa ja m epäyhtälörajoitusta. Mikä seuraavista vaatimuksista on sellainen, jonka täytyy aina olla voimassa?
a) $m=n$ b) $m>n$ c) $m<n$ d) m ja n vapaita.
Entä ongelmassa, jossa epäyhtälörajoitusten sijaan on m kappaletta lineaarisia yhtälöitä, mutta epälineaarinen kohdefunktio. Tehtävässä luonnollisesti oletetaan, että $m>0$ ja $n>0$.
2p.