



Usean muuttujan funktiot

Tentti 16.10.2020 / Merja Laaksonen

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta

Muista, että pisteet tulevat perusteluista eikä arvauksista.

1. Olkoon $f(x, y, z) = xy^3 + x \ln(z)$.

a) Laske ∇f .

b) Jos $\Delta x = -1/2$, $\Delta y = 1/4$ ja $\Delta z = 1/3$, niin laske funktion f kokonaisdifferentiaalinen arvo pisteessä $(3, 2, 1)$.

c) Jos $x = 2t^3$, $y = \sin(t)$ ja $z = e^t$, niin määritä $\frac{df}{dt}$ soveltaen ketjusääntöä.

2. Tarkastellaan funktiota $f : f(x, y) = x + 2y^2$. Sen tasa-arvokäyrät $f(x, y) = c$ ovat parametrimuodossa $\mathbf{r}(t) = [c - 2t^2, t]^T$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Osoita, että pisteeseen $\mathbf{r}(a)$, $a \in \mathbb{R}$ asetettu tasa-arvokäyrän tangenttivektori ja funktion gradientti ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

b) Mihin suuntaan funktio f kasvaa voimakkaimmin pisteessä $(1, -2)$?

c) Laske suunnatun derivaatan arvo pisteessä $(1, -2)$ vektorin $(4, 3)$ suuntaan.

3. Olkoon $f(x, y) = 3 - 4y^3 - 9x^2y + 36y$. Etsi funktion suurin ja pienin arvo alueessa

$$\Omega = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \wedge y \geq 0 \right\}.$$

4. Paraboloidi $z = x^2 + y^2$ ja taso $z = 4$ rajaavat kappaleen, jonka tiheys

$$\delta(x, y, z) = \frac{15}{16} \sqrt{x^2 + y^2} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

Laske sen massa. (Koordinaatistossa yksikkönä on cm).