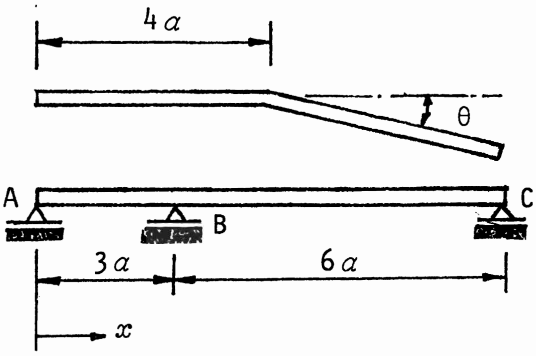
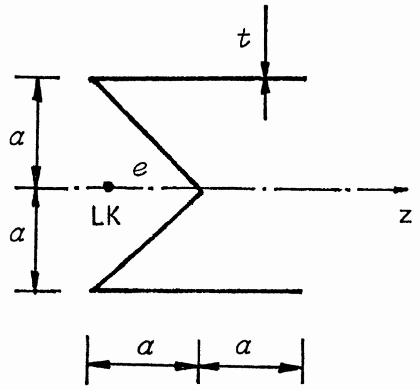
TTY/ Konstruktiotekniikan laitos
Teknillinen mekaniikka ja optimointi
TME-2200 Rakenteiden mekaniikka
1.välikoe 12.3.2010

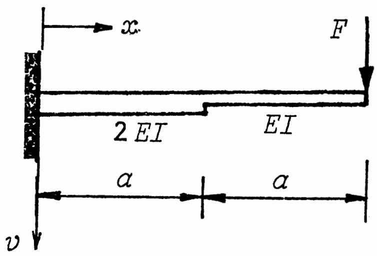
1.vk/TME-2200/K2010
Tapio Salmi, Timo Saksala



1. Valmistusvirheellinen palkki, jossa on kuvan mukainen taite, pakotetaan vaakasuoraksi kuvan mukaiselle kolmelle jäykälle tuelle. määritä kimmoviivan differentiaaliyhtälön ja reunaehtojen avulla suoristetun palkin tukireaktiot. Käytä *kärkisulkeisfunktioita*. Palkin taivutusjäykkyys on EI.



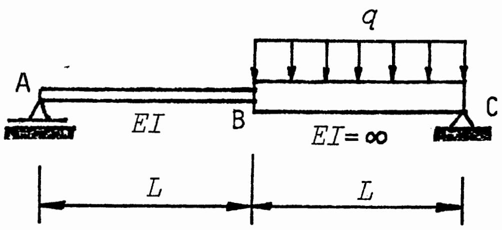
2. Määritä kuvan avoimen ja ohutseinäisen ($t << a$) poikkileikkauksen *leikkauskeskiön* LK paikka (etäisyys e). Poikkileikkausta rasittaa alaspäin leikkausvoima Q.



3. Määritä kuvan paloittain tasavahvan ulokepalkin kuormitetun pään pystysiirtymä käyttämällä *virtuaalisen työn* (tai potentiaalienergian minimin) periaatetta. Käytä taipumaestimaattia

$$\tilde{v}(x) = C\,x^2$$

Vertaa tulosta tarkkaan arvoon $\frac{3}{2} F a^3 / EI$.



4. Määritä *ykkösvoimaperiaatteella* kuvan palkin keskipisteen B pystysiirtymä. Palkin oikea puolisko on täysin jäykkä. Vain taivutuksen osuus otetaan huomioon.

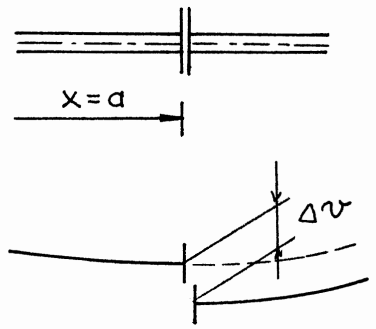
KÄÄNNÄ

Jos palkilla on sisäalueessa kinemaattisia syitä, joista johtuu kimmoviivaan epäjatkuvuutta tai derivaatan epäjatkuvuutta, menetellään seuraavasti:

1° Johde, kohdassa $x=a$: Johde sallii sen eri puolilla olevien palkin osien välille relatiivisen siirtymän Δv, muttei salli relatiivista suunnan muutosta. Silloin kirjoitetaan

$$v(x) = v_1(x) + \Delta v \langle x-a \rangle^0 \qquad (7.1)$$

missä $v_1(x)$ on taipumaviiva palkille, jolla ei ole välillä johdetukea, $v_1(x)$ on diff. yhtälön yleinen ratkaisu. Reunaehtoja sovelletaan vasta yhtälöön (7.1).



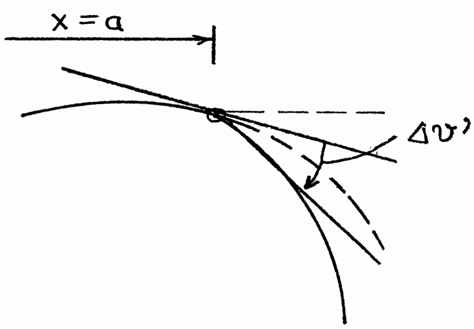
Kuva 7.1 Johde kohdassa $x=a$.

2° Nivel, kohdassa $x=a$: Nivel sallii sen eri puolilla olevien palkin osien välille relatiivisen suunnan muutoksen $\Delta v'$, muttei salli relatiivista siirtymää, joten

$$v'(x) = v_1'(x) + \Delta v' \langle x-a \rangle^0 \qquad (7.2)$$

$$\Rightarrow v(x) = v_1(x) + \Delta v' \langle x-a \rangle^1 \qquad (7.3)$$

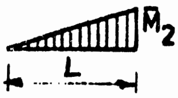
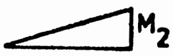
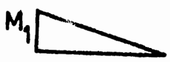
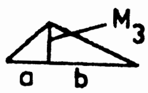
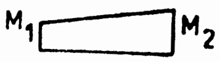
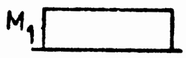
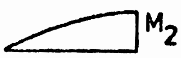
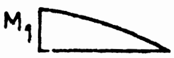
$v_1(x)$ on yleinen ratkaisu. Reunaehtoja sovelletaan vasta yhtälöihin (7.2) ja (7.3).

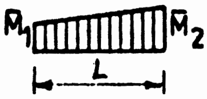
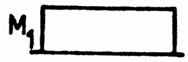
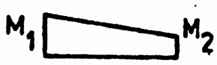
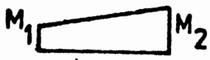
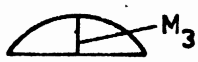
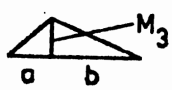


Kuva 7.2 Nivel kohdassa $x=a$.

Taulukko 1. Mohrin työintegraaleja.

Taulukossa on otsikon viivoitetun kolmio- tai trapetsifunktion $\bar{M}$ ja kullakin rivillä esitetyn kolmio- trapatsi- tai paraabelifunktion M integraali. Kunkin paraabelin huippu on joko integroimisalueen L reunassa tai sen keskellä.

		$\int_0^L \bar{M} M \, dx$
1		$\frac{1}{3} L \bar{M}_2 M_2$
2		$\frac{1}{6} L \bar{M}_2 M_1$
3		$\frac{1}{6} L \bar{M}_2 M_3 \left(1 + \frac{a}{L}\right)$
4		$\frac{1}{6} L \bar{M}_2 (M_1 + 2M_2)$
5		$\frac{1}{2} L \bar{M}_2 M_1$
6		$\frac{5}{12} L \bar{M}_2 M_2$
7		$\frac{1}{4} L \bar{M}_2 M_1$
8		$\frac{1}{4} L \bar{M}_2 M_2$
9		$\frac{1}{12} L \bar{M}_2 M_1$
10		$\frac{1}{3} L \bar{M}_2 M_3$

		$\int_0^L \bar{M} M \, dx$
1		$\frac{1}{2} L (\bar{M}_1 + \bar{M}_2) M_1$
2		$\frac{1}{6} L [\bar{M}_1 (2M_1 + M_2) +$ $+ \bar{M}_2 (M_1 + 2M_2)]$
3		Kun $M = \bar{M}$, $\frac{1}{3} L (M_1^2 + M_1 M_2 + M_2^2)$
4		$\frac{1}{12} L (3\bar{M}_1 + 5\bar{M}_2) M_2$
5		$\frac{1}{12} L (\bar{M}_1 + 3\bar{M}_2) M_2$
6		$\frac{1}{3} L (\bar{M}_1 + \bar{M}_2) M_3$
7		$\frac{1}{6} L \left[\bar{M}_1 \left(1 + \frac{b}{L}\right) + \right.$ $\left. + \bar{M}_2 \left(1 + \frac{a}{L}\right)\right] M_3$

2305410 Palkkirakenteet

Kaavakokoelma/*Tapio Salmi* sl. 2003

$$\mathrm{f}(x) = \langle x-a \rangle^{\mathrm{n}} = \begin{cases} (x-a)^{\mathrm{n}} \ , & x \ge a \\ 0 \ , & x < a \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \langle x-a \rangle_{-1} \, \mathrm{d}x = \langle x-a \rangle^{0}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \langle x-a \rangle^{0} = \langle x-a \rangle_{-1} = \begin{cases} 0 \ , & x < a \\ \infty \ , & x = a \\ 0 \ , & x > a \end{cases}$$

$$EI(x)\, v''(x) = -M_{\mathrm{t}}(x) \qquad \sigma_{\mathrm{x}} = \frac{M_{\mathrm{t}}}{I_{\mathrm{z}}} y$$

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} = \tau_{\mathrm{sx}}\, t = -\frac{Q_{\mathrm{y}} S_{\mathrm{z}}}{I_{\mathrm{z}}} - \frac{Q_{\mathrm{z}} S_{\mathrm{y}}}{I_{\mathrm{y}}} = \tau_{\mathrm{xs}}\, t = q \qquad \tau_{\mathrm{zx}} = \tau_{\mathrm{xz}} = \frac{\zeta}{z} \tau_{\mathrm{yx}} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$$

$$A^{\lambda} = \iint_A \mathrm{d}A^{\lambda} = \iint_A \lambda(y,z)\, \mathrm{d}A \qquad y_0^{\lambda} = S_{\mathrm{z}}^{\lambda} / A^{\lambda} \qquad z_0^{\lambda} = S_{\mathrm{y}}^{\lambda} / A^{\lambda}$$

$$S_{\mathrm{y}}^{\lambda} = \iint_A z\, \mathrm{d}A^{\lambda} = \iint_A z\, \lambda(y,z)\, \mathrm{d}A \qquad S_{\mathrm{z}}^{\lambda} = \iint_A y\, \mathrm{d}A^{\lambda} = \iint_A y\, \lambda(y,z)\, \mathrm{d}A$$

$$I_{\mathrm{z}}^{\mathrm{E}} = \iint_A E(y,z)\, y^2\, \mathrm{d}A \qquad I_{\mathrm{y}}^{\mathrm{E}} = \iint_A E(y,z)\, z^2\, \mathrm{d}A$$

$$I_{\mathrm{yz}}^{\mathrm{E}} = \iint_A E(y,z)\, yz\, \mathrm{d}A \qquad I_{\mathrm{z}} = I_{\zeta} + A\, y_0^2 \qquad \varepsilon_{\mathrm{x}} = \frac{N}{A^{\mathrm{E}}}$$

$$\sigma_{\mathrm{x}}(\mathrm{A}) = \frac{E_{\mathrm{A}} N}{A^{\mathrm{E}}} + \frac{E_{\mathrm{A}} M_{\mathrm{t}\zeta}}{I_{\zeta}^{\mathrm{E}}} \eta_{\mathrm{A}} + \frac{E_{\mathrm{A}} M_{\mathrm{t}\eta}}{I_{\eta}^{\mathrm{E}}} \zeta_{\mathrm{A}} \qquad \tan\beta = \frac{I_{\zeta}^{\mathrm{E}}}{I_{\eta}^{\mathrm{E}}} \tan\alpha \qquad \delta W = F\, \delta u$$

$$[L_{\sigma}]\{\sigma\} + \{\underline{f}\} = \{0\} \qquad [G]\{\sigma\} = \{\underline{p}\} \qquad \{u\} = \{\underline{u}\} \qquad W = \int_0^u F(\bar{u})\, \mathrm{d}\bar{u}$$

$$\delta W_{\mathrm{u}} = \iint_{S_{\sigma}} \{\underline{p}\}^{\mathrm{T}} \{\delta u\}\, \mathrm{d}S_{\sigma} + \iiint_V \{\underline{f}\}^{\mathrm{T}} \{\delta u\}\, \mathrm{d}V \qquad \delta W_{\mathrm{s}} = -\iiint_V \{\sigma\}^{\mathrm{T}} \{\delta\varepsilon\}\, \mathrm{d}V$$

$$\delta W_{\mathrm{u}} + \delta W_{\mathrm{s}} = 0 \qquad \delta W_{\mathrm{u}} = \delta W_{\sigma} \qquad \delta W_{\sigma} = \iiint_V \{\sigma\}^{\mathrm{T}} \{\delta\varepsilon\}\, \mathrm{d}V = -\delta W_{\mathrm{s}}$$

$$\delta U = \iiint_V \{\sigma\}^{\mathrm{T}} \{\delta\varepsilon\}\, \mathrm{d}V \qquad \delta U_0 = \{\sigma\}^{\mathrm{T}} \{\delta\varepsilon\} \qquad \delta W_{\mathrm{u}} = \delta U \qquad \delta W_{\mathrm{u}} = -\delta V$$

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \qquad U_0 = \tfrac{1}{2} \{\sigma\}^{\mathrm{T}} \{\varepsilon\} = \tfrac{1}{2} \{\varepsilon\}^{\mathrm{T}} [E] \{\varepsilon\} \qquad \pi = U + V$$

$$\delta U_0 = \{\varepsilon\}^{\mathrm{T}} [E] \{\delta\varepsilon\} \qquad \delta\pi = 0 \qquad \delta^2 \pi \ge 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial u_{\mathrm{i}}} = F_{\mathrm{i}}$$

$$\sigma_{\mathrm{ij}} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{\mathrm{ij}}} \qquad U = \tfrac{1}{2} \int_0^L \left(EA\, (u_{,x})^2 + EI\, (v_{,xx})^2 + GA\, \gamma^2 + GI_{\mathrm{v}}\, \Theta^2 \right) \mathrm{d}x$$

$$p_x = \sigma_x\, l + \tau_{xy}\, m + \tau_{xz}\, n \qquad \sigma_{x},_{x} + \tau_{xy},_{y} + \tau_{xz},_{z} + \underline{f_x} = 0$$

$$p_y = \tau_{xy}\, l + \sigma_y\, m + \tau_{yz}\, n \qquad \tau_{xy},_{x} + \sigma_{y},_{y} + \tau_{yz},_{z} + \underline{f_y} = 0$$

$$p_z = \tau_{xz}\, l + \tau_{yz}\, m + \sigma_z\, n \qquad \tau_{xz},_{x} + \tau_{yz},_{y} + \sigma_{z},_{z} + \underline{f_z} = 0$$

$$\varepsilon_x = u,_x \qquad \varepsilon_y = v,_y \qquad \varepsilon_z = w,_z$$

$$\gamma_{xy} = u,_y + v,_x \qquad \gamma_{yz} = v,_z + w,_y \qquad \gamma_{xz} = u,_z + w,_x \qquad \delta W^* = u\,\delta F$$

$$\delta W^* = \{u\}^{\mathrm{T}}\{\delta F\} \qquad \delta W_{\mathrm{u}}^* = \oint\!\!\oint_S \{u\}^{\mathrm{T}}\{\delta p\}\,\mathrm{d}S + \iiint_V \{u\}^{\mathrm{T}}\{\delta f\}\,\mathrm{d}V \qquad \delta W_{\mathrm{u}}^* + \delta W_{\mathrm{s}}^* = 0$$

$$\delta W_{\mathrm{s}}^* = -\iiint_V \{\varepsilon\}^{\mathrm{T}}\{\delta\sigma\}\,\mathrm{d}V \qquad \delta W_{\varepsilon}^* = \iiint_V \{\varepsilon\}^{\mathrm{T}}\{\delta\sigma\}\,\mathrm{d}V \qquad \delta W_{\mathrm{u}}^* = \delta W_{\varepsilon}^*$$

$$\delta W_{\varepsilon}^* = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{L_\nu} (\varepsilon_0\,\delta N + \kappa_{\mathrm{y}}\,\delta M_{\mathrm{ty}} + \kappa_{\mathrm{z}}\,\delta M_{\mathrm{tz}} + \gamma_{\mathrm{y}}\,\delta Q_{\mathrm{y}} + \gamma_{\mathrm{z}}\,\delta Q_{\mathrm{z}} + \Theta\,\delta T)\,\mathrm{d}x$$

$$u_{\mathrm{i}} \cdot 1 = \iiint_V \{\varepsilon\}^{\mathrm{T}}\{\overline{\sigma}\}\,\mathrm{d}V$$

$$u_{\mathrm{i}} \cdot 1 = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{L_\nu} (\varepsilon_0\,\overline{N} + \kappa_{\mathrm{y}}\,\overline{M}_{\mathrm{ty}} + \kappa_{\mathrm{z}}\,\overline{M}_{\mathrm{tz}} + \gamma_{\mathrm{xy}}\,\overline{Q}_{\mathrm{y}} + \gamma_{\mathrm{xz}}\,\overline{Q}_{\mathrm{z}} + \Theta\,\overline{T})\,\mathrm{d}x$$

$$u_{\mathrm{i}} \cdot 1 = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{L_\nu} \left(\frac{N\overline{N}}{EA} + \frac{M_{\mathrm{ty}}\overline{M}_{\mathrm{ty}}}{EI_{\mathrm{y}}} + \frac{M_{\mathrm{tz}}\overline{M}_{\mathrm{tz}}}{EI_{\mathrm{z}}} + \zeta_{\mathrm{y}}\frac{Q_{\mathrm{y}}\overline{Q}_{\mathrm{y}}}{GA} + \zeta_{\mathrm{z}}\frac{Q_{\mathrm{z}}\overline{Q}_{\mathrm{z}}}{GA} + \frac{T\overline{T}}{GI_{\mathrm{v}}}\right)\mathrm{d}x$$

$$u_{\mathrm{i}} \cdot 1 = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{L_\nu} \frac{N\overline{N}}{EA}\,\mathrm{d}x \qquad u_{\mathrm{i}} \cdot 1 = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{L_\nu} \frac{M_{\mathrm{tz}}\overline{M}_{\mathrm{tz}}}{EI_{\mathrm{z}}}\,\mathrm{d}x \qquad [a]\{X\} + \{u_0\} = \{\underline{u}\}$$

$$u_{0\mathrm{i}} = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{L_\nu} \frac{M_{\mathrm{t0}}\overline{M}_{\mathrm{ti}}}{EI}\,\mathrm{d}x \qquad a_{\mathrm{ij}} = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{L_\nu} \frac{\overline{M}_{\mathrm{ti}}\overline{M}_{\mathrm{tj}}}{EI}\,\mathrm{d}x \qquad u = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{L_\nu} \frac{M_{\mathrm{t}}\overline{M}_{\mathrm{tu}}}{EI}\,\mathrm{d}x$$

$$M_{\mathrm{t}}(x) = M_{\mathrm{t0}}(x) + \sum_{\mathrm{i}=1}^{m} X_{\mathrm{i}}\,\overline{M}_{\mathrm{ti}}(x) \qquad v(x) = v_0(x) + \sum_{\mathrm{i}=1}^{m} X_{\mathrm{i}}\,\overline{v}_{\mathrm{i}}(x)$$

$$\varepsilon_{\mathrm{ij}} = \frac{\partial U_0^*}{\partial \sigma_{\mathrm{ij}}} \qquad \delta U_0^* = \iiint_V \{\varepsilon\}^{\mathrm{T}}\{\delta\sigma\}\,\mathrm{d}V \qquad \delta W_{\mathrm{u}}^* = -\delta V^* \qquad \pi^* = U^* + V^*$$

$$\delta\pi^* = 0 \qquad u_{\mathrm{i}} = \frac{\partial U^*}{\partial F_{\mathrm{i}}} \qquad \{F\}^{\mathrm{T}}\{u^P\} = \{P\}^{\mathrm{T}}\{u^F\}$$

$$U^* = \tfrac{1}{2}\int_L \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_{\mathrm{ty}}^2}{EI_{\mathrm{y}}} + \frac{M_{\mathrm{tz}}^2}{EI_{\mathrm{z}}} + \zeta_{\mathrm{y}}\frac{Q_{\mathrm{y}}^2}{GA} + \zeta_{\mathrm{z}}\frac{Q_{\mathrm{z}}^2}{GA} + \frac{T^2}{GI_{\mathrm{v}}}\right)\mathrm{d}x$$