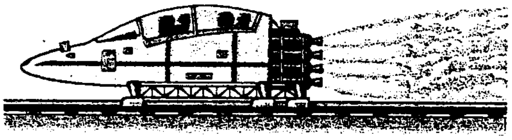
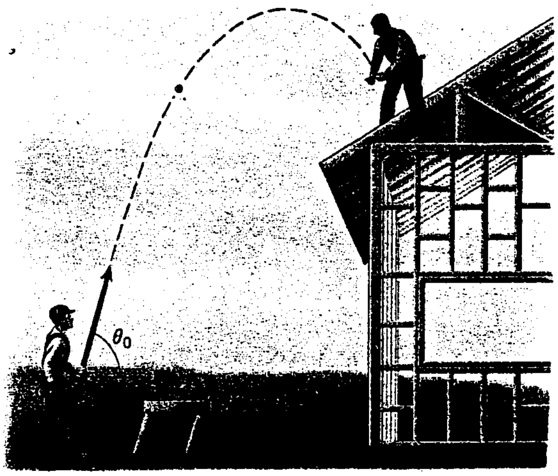
23120 Dynamiikan perusteet
1. välikoe 17.2.2006

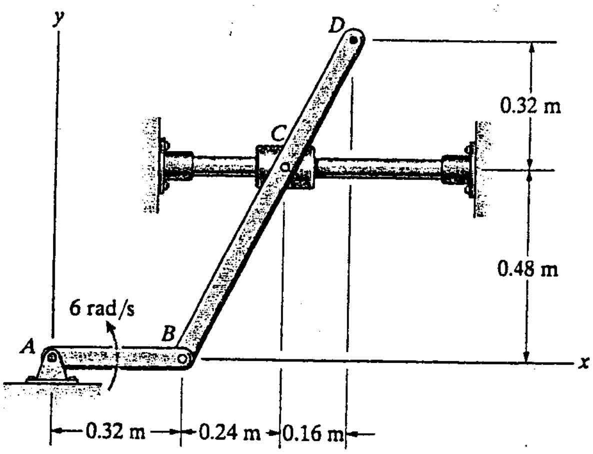
Mukana saa olla yksi A4-kokoinen oma kaavakokoelma.
Vastauspapereihin on kirjoitettava oma nimi, NIMEN SELVENNÖS ja opiskelijanumero.



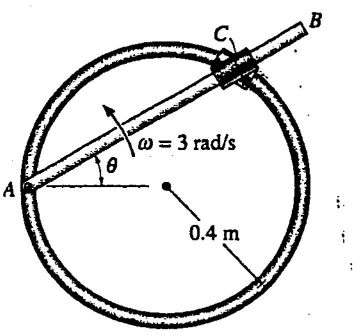
1. Rakettireki lähtee liikkeelle levosta ja sillä on kiihtyvyys $a = \left(30+2\frac{t}{\mathrm{s}}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, kunnes sen nopeus on 400 m/s. Silloin se osuu veteen, joka aiheuttaa sille kiihtyvyyden $a = -0{,}003\ v^2\ \frac{1}{\mathrm{m}}$ niin kauan, kun nopeus on pudonnut arvoon 100 m/s. Mikä on reen kulkema matka ja kuinka kauan matka kesti?



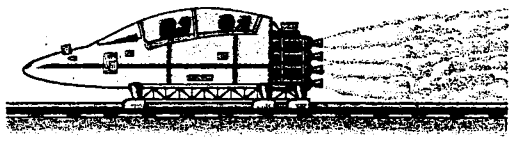
2. Katolla työskentelevä timpuri pyytää apulaistaan heittämään hänelle omenan vauhdilla 9,75 m/s. Määritä heittokulma θ_0, jotta omena osuisi timpurin käteen, joka on 3,66 metrin vaaka- ja 3,66 metrin pystyetäisyydellä heittopaikasta.
Vihje: $\frac{1}{\cos^2\varphi} = 1+\tan^2\varphi$



3. Sauvan AB kulmanopeus on 6 1/s. Määritä sauvan BD kulmanopeus ja pisteen D nopeus kuvan esittämällä hetkellä.



4. Sauvan AB vakiokulmanopeus on 3 1/s. Määritä luistin C nopeus ja kiihtyvyys hetkellä, jolloin kulma $\theta = 45°$. C on kaksoisluisti, jonka molemmat osat on nivelöity toisiinsa. Toinen osa luistaa pitkin sauvaa AB ja toinen pitkin ympyrän kaarta.



1. Rakettireki lähtee liikkeelle levosta ja sillä on kiihtyvyys $a = \left(30+2\frac{t}{\text{s}}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, kunnes sen nopeus on 400 m/s. Silloin se osuu veteen, joka aiheuttaa sille kiihtyvyyden $a = -0{,}003\, v^2 \frac{1}{\text{m}}$ niin kauan, kun nopeus on pudonnut arvoon 100 m/s. Mikä on reen kulkema matka ja kuinka kauan matka kesti?

Ratkaisu: järj (m, s)

kiihdytysvaihe: $a = 30 + 2t$

$v = 30t + t^2 \qquad v(0) = 0$

$$v_1 = v(t_1) = 30t_1 + t_1^2 = 400$$

$$t_1^2 + 30t_1 - 400 = 0 \Rightarrow t_1 = -15 \,(+)\, \sqrt{225 + 400} = 10$$

$$s = 15t^2 + \frac{1}{3}t^3 \qquad s(0) = 0$$

$$s_1 = s(t_1) = 15 \cdot 10^2 + \frac{1}{3} 10^3 = 1833$$

järrutus: $a = -0{,}003\, v^2$

$$v\,dv = a\,ds = -0{,}003\, v^2\, ds$$

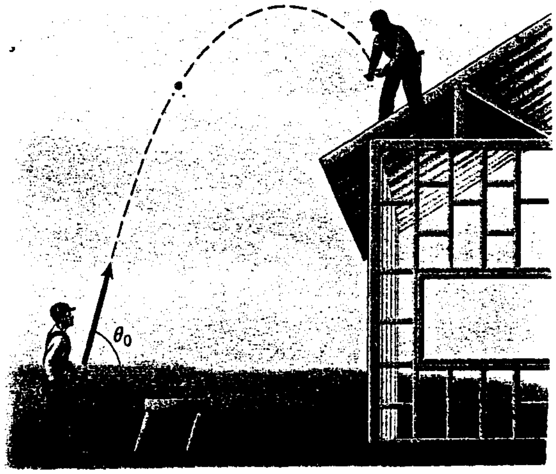
$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = \int_{s_1}^{s_2} -0{,}003\, ds \Rightarrow \ln\frac{v_2}{v_1} = -0{,}003(s_2 - s_1)$$

$$s_2 = s_1 + \frac{1}{0{,}003} \ln\frac{v_1}{v_2} = 1833 + \frac{1}{0{,}003} \ln\frac{400}{100} = 2295 \approx \underline{\underline{2300\,\text{m}}}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -0{,}003\, v^2$$

$$\int_{v_1}^{v_2} v^{-2}\, dv = \int_{t_1}^{t_2} -0{,}003\, dt \Rightarrow \Big/_{v_1}^{v_2} -v^{-1} = -0{,}003(t_2 - t_1)$$

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{0{,}003}\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right) = 10 + \frac{1}{0{,}003}\left(\frac{1}{100} - \frac{1}{400}\right) = \underline{\underline{12{,}5\ \text{s}}}$$



2. Katolla työskentelevä timpuri pyytää apulaistaan heittämään hänelle omenan vauhdilla 9,75 m/s. Määritä heittokulma θ_0, jotta omena osuisi timpurin käteen, joka on 3,66 metrin vaaka- ja 3,66 metrin pystyetäisyydellä heittopaikasta.
Vihje: $\frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \tan^2\varphi$

Ratkaisu

järj (m, s)

$\ddot{x} = 0$ $\qquad \ddot{y} = -g$

$\dot{x} = v_0 \cos\theta_0$ $\qquad \dot{y} = -gt + v_0 \sin\theta_0$

$x = v_0 \cos\theta_0 \cdot t$ $\qquad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta_0 \cdot t$

$$\Rightarrow \quad t_1 = \frac{x_1}{v_0 \cos\theta_0}$$

$$y_1 = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x_1}{v_0\cos\theta_0}\right)^2 + v_0 \sin\theta_0 \frac{x_1}{v_0 \cos\theta_0}$$

$y_1 = x_1 \quad \Rightarrow$

$$1 = -\frac{1}{2}\frac{g x_1}{v_0^2 \cos^2\theta_0} + \tan\theta_0$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta_0} = 1 + \tan^2\theta_0$$

$$\Rightarrow \quad 1 = -\frac{g x_1}{2 v_0^2}\left(1 + \tan^2\theta_0\right) + \tan\theta_0$$

$$1 + \tan^2\theta_0 + \frac{2v_0^2}{g x_1}\left(1 - \tan\theta_0\right) = 0$$

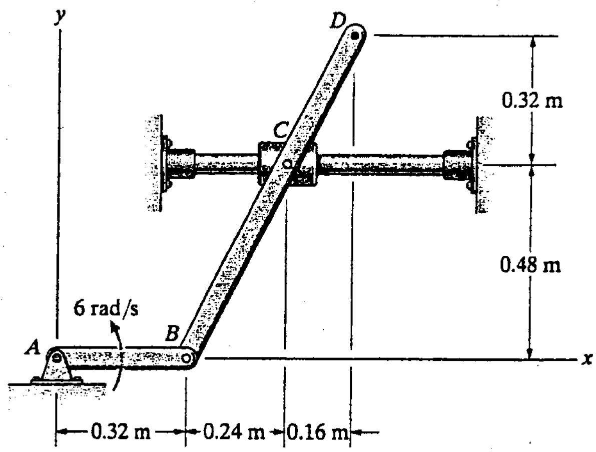
$$\tan^2\theta_0 - \frac{2v_0^2}{g x_1}\tan\theta_0 + 1 + \frac{2v_0^2}{g x_1} = 0$$

$$\tan\theta_0 = \frac{v_0^2}{g x_1} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g x_1}\right)^2 - 1 - \frac{2v_0^2}{g x_1}}$$

$v_0 = 9,75 \qquad g = 9,81 \qquad x_1 = 3,66$

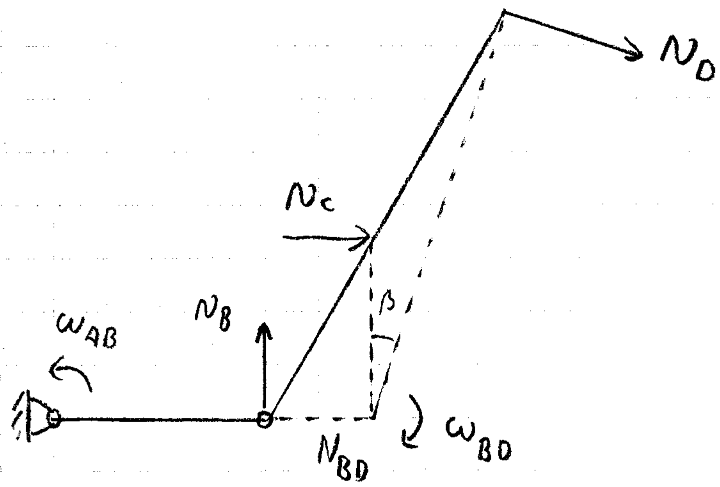
$$\tan\theta_0 = 2,64764 \pm \sqrt{2,64764^2 - 1 - 2\cdot 2,64764}$$

$\tan\theta_0 = 3,493 \Rightarrow \underline{\underline{\theta_0 = 74,0^\circ}} \qquad \tan\theta_0 = 1,802 \Rightarrow \underline{\underline{\theta_0 = 61,0^\circ}}$



3. Sauvan *AB* kulmanopeus on 6 1/s. Määritä sauvan *BD* kulmanopeus ja pisteen *D* nopeus kuvan esittämällä hetkellä.

Ratkaisu: järj (m,s)



$$v_B = |AB|\,\omega_{AB} = |BN_{BD}|\,\omega_{BD}$$

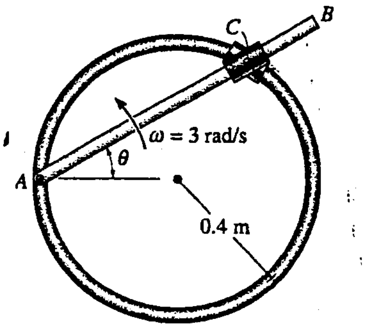
$$\omega_{BD} = \frac{|AB|}{|BN_{BD}|}\,\omega_{AB} = \frac{0,32}{0,24}\,6 = \underline{\underline{8\ 1/s}}$$

$$|DN_{BD}| = \sqrt{0,16^2 + 0,8^2} = 0,8158 \qquad \tan\beta = \frac{0,16}{0,8} \Rightarrow \beta = 11,3^\circ$$

$$v_D = |DN_{BD}|\,\omega_{BD} = \underline{\underline{6,53\ m/s}} \quad 11,3^\circ$$

$$|v_{Dx}| = 0,8 \cdot 8 = 6,4 \qquad |v_{Dy}| = 0,16 \cdot 8 = 1,28$$

$$\underline{\underline{\vec{v}_D = (6,4\,\vec{i} - 1,28\,\vec{j})\ m/s}}$$



4. Sauvan AB vakiokulmanopeus on 3 1/s. Määritä luistin C nopeus ja kiihtyvyys hetkellä, jolloin kulma $\theta = 45°$. C on kaksoisluisti, jonka molemmat osat on nivelöity toisiinsa. Toinen osa luistaa pitkin sauvaa AB ja toinen pitkin ympyrän kaarta.

Ratkaisu:

järj (m, s)

$$\vec{v}_C = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{C/A} + \vec{v}_{rel}$$

$$v_C \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ r & r & 0 \end{vmatrix} + v_{rel} \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{i} + \vec{j})$$

$$\left.\begin{aligned} v_C &= -r\omega + \frac{1}{\sqrt{2}} v_{rel} \\ 0 &= r\omega + \frac{1}{\sqrt{2}} v_{rel} \end{aligned}\right\} + \Rightarrow v_{rel} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_C$$

$$v_C = -2r\omega = -2 \cdot 0{,}4 \cdot 3 = -2{,}4 \qquad \underline{\underline{\vec{v}_C = -2{,}4\,\vec{i} \text{ m/s}}}$$

$$\vec{a}_C = \vec{\alpha}_{AB} \times \vec{r}_{C/A} - \omega_{AB}^2 \vec{r}_{C/A} + 2\,\vec{\omega}_{AB} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}$$

$$a_{Cx} \vec{i} + a_{Cy} \vec{j} = -\omega^2 (r\vec{i} + r\vec{j}) + 2\omega v_{rel} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right) + $$

$$+ a_{rel} \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{i} + \vec{j})$$

$$\left.\begin{aligned} a_{Cx} &= -\omega^2 r + \sqrt{2}\,\omega v_{rel} + \frac{1}{\sqrt{2}} a_{rel} = -\omega^2 r - 2r\omega^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} a_{rel} \\ -\frac{v_C^2}{r} &= -\omega^2 r - \sqrt{2}\,\omega v_{rel} + \frac{1}{\sqrt{2}} a_{rel} = -\omega^2 r + 2r\omega^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} a_{rel} \end{aligned}\right\} -$$

$$a_{Cx} + \frac{v_C^2}{r} = -4r\omega^2 \Rightarrow a_{Cx} = -4r\omega^2 - \frac{v_C^2}{r} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{a}_C}} = a_{Cy}\vec{j} = -\frac{v_C^2}{r}\vec{j} = -4r\omega^2\vec{j} = \underline{\underline{-14{,}4\,\vec{j} \text{ m/s}^2}}$$