TAU / Rakennettu ympäristö

Rakennustekniikka

RAK-32301 ELEMENTTIMENETELMÄN PERUSTEET, 5 op

Syksy 2020 Jarmo Poutala

1. Tentti

Kaikki laskimet sallittuja ! ti 08.12.2020

Välikoe 1	Välikokeeseen 1 kuuluvat tehtävät 1, 2 ja 5. (Merkitse 1V)
Välikoe 2	Välikokeeseen 2 kuuluvat tehtävät 3, 4 ja 6. (Merkitse 2V)
Tentti	Tenttiin kuuluvat tehtävät 1-4. (Merkitse T)

$$y(x)_{Exact} = 3\cdot x^2 - 3\cdot e^{\left(-\frac{x}{3}\right)}\cdot \cos\left(\frac{\sqrt{2}\cdot x}{3}\right) \ldots$$

$$-10\cdot x + (e^{\left(-\frac{x}{3}\right)}\cdot \sin\left(\frac{\sqrt{2}\cdot x}{3}\right)\cdot (3\cdot \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \ldots$$

$$+4\cdot e^{\frac{1}{3}}))/\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) + 3$$

$$y(0{,}5)_{Exact} \approx -0{,}1259$$

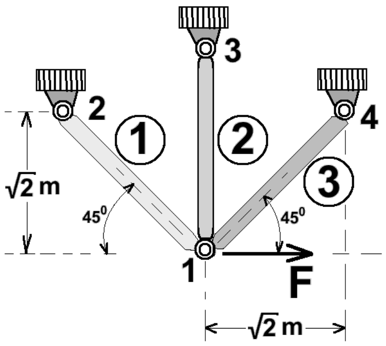
1. Ratkaise Galerkinin menetelmällä differentiaaliyhtälö

$$3\cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 2\cdot \frac{dy}{dx} + y = 3\cdot x^2 + 2\cdot x + 1, \qquad x \in [0,1], \qquad y(0) = y(1) = 0,$$

käyttäen vain yhtä kantafunktiota

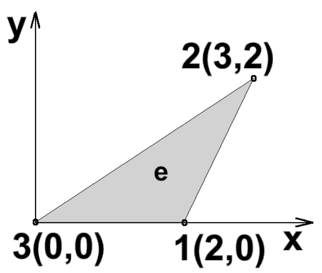
$$G_1 = x\cdot \left(x^2 - 1\right).$$

Vertaa saatua tulosta tarkkaan ratkaisuun, kun **x=0,5**.



$$\sigma = \frac{E_e}{\ell_e}\begin{bmatrix}-\ell & -m & \ell & m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_1\\q_2\\q_3\\q_4\end{Bmatrix}$$

2. Määritä kuvassa olevan kolmisauvaisen ristikon sekä solmun **1** siirtymät että sauvojen **1, 2** ja **3** normaalijännitykset elementtimenetelmällä. Sauva **2** on pystysuorassa. Sauvat **1** ja **3** ovat vaakasuoraan nähden kulmassa **45°**. Sauvojen pituus **L=2 m**. Materiaalin kimmomoduuli **E=200 GPa**. Sauvat ovat ainevahvuudeltaan erilaiset. Sauvan **1** poikkipinta-ala **A=500 mm²** , sauvan **2** poikkipinta-ala on **2A** ja sauvan **3** poikkipinta-ala on **3A**. Solmuun **1** vaikuttaa vaakasuorassa oleva voima $\mathbf{F = 120000\ N}$.



3. Määritä Gaussin kvadratuuria (integrointimenetelmiä) käyttäen tarkka ratkaisu numeerisesti integraalille $\mathbf{I_{yy} = \iint_A y^2\, dA}$ alueessa **e**

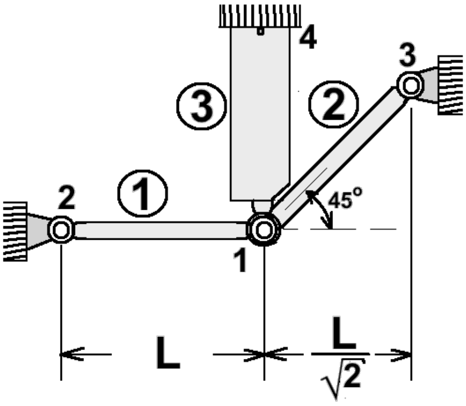
a) käyttäen kolmisolmuista **CST** elementtiä ja kuvan alla olevaa kaavaa ja

b) käyttäen Gaussin numeerista integrointia ja nelisolmuista elementtiä, jolloin solmut **3** ja **4** yhtenevät.

$$N_1 = \xi \qquad N_2 = \eta \qquad N_3 = 1 - \xi - \eta$$

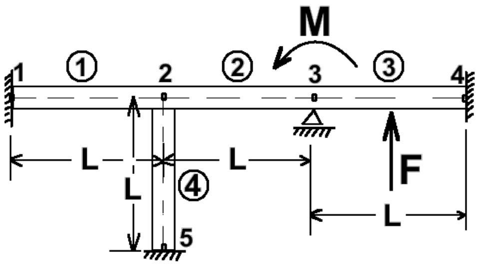
$$I = \int_0^1\int_0^{1-\xi} N_1^a\cdot N_2^b\cdot N_3^c\cdot 2A\cdot d\xi d\eta = \frac{a!\ b!\ c!}{(a+b+c+2)!}\cdot 2A$$

KÄÄNNÄ !

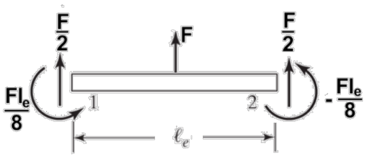


4. Ratkaise elementtimenetelmällä kuvan palkki- ja sauvarakenteen alimmat ominaistaajuudet ja vastaavat ominaisvektorit käyttäen palkille konsistenttia ja sauvoille keskitettyä massamatriisia. Venymätön palkkielementti (**3**) on jäykästi kiinni yläpäästä ja palkin alapäässä on nivel kahta ristikkoelementtiä (**1** ja **2**) varten. Elementtien pituus on **L**. Palkin ja sauvojen poikkipinta-ala on **A** ja palkin neliömomentti on **I**. Materiaalin kimmomoduuli on **E** ja tiheys on ρ.

$$\frac{\mathbf{E \cdot I}}{\mathbf{L^3}} = \mathbf{4} \cdot \frac{\mathbf{E \cdot A}}{\mathbf{L}} \quad , \quad \sqrt{\frac{\mathbf{E \cdot I}}{\rho \cdot \mathbf{A \cdot L^4}}} = \mathbf{100} \ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s}}$$

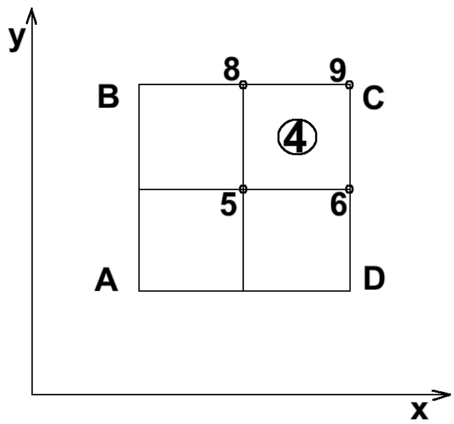


5. Määritä kuvassa olevan neljäksi elementiksi jaetun kehärakenteen solmujen **2** ja **3** kiertymät elementtimenetelmällä. Materiaalin kimmomoduuli **E=200 GPa**. Palkin poikkipinnan neliömomentti **I_z=10^{-4} m^4** . Solmun **3** pistemomentti **M=100 kNm** on vastapäivään ja elementin **3** keskellä oleva pistevoima **F=100 kN**. Palkkielementit oletetaan venymättömiksi ja niiden pituus **L=4 m**. Laske lisäksi kehän taipumat elementtien **1** ja **2** keskellä sekä vasemman pään tukimomentti solmussa **1**.



$$v(\xi) = H_1 q_1 + \frac{l_e}{2} H_2 q_2 + H_3 q_3 + \frac{l_e}{2} H_4 q_4$$

$$F_1 = \frac{F}{2}, \quad F_2 = \frac{Fl_e}{8}, \quad F_3 = \frac{F}{2}, \quad F_4 = -\frac{Fl_e}{8}$$



6. Määritä kuvassa olevan levyrakenteen **ABCD** elementin **4** tasojännitystilan mukaiset jännitykset tämän elementin keskipisteessä. FEM-ohjelmalla saadut nelisolmuisen elementin **4** siirtymät ovat alla olevassa taulukossa. Taulukon siirtymät ovat millimetreinä ja koordinaatit metreinä. Elementin **4** leveys on **0,5 m** ja korkeus on **0,5 m**. Rakenne on jäykästi kiinni solmukohdissa **8** ja **9**. Alla ovat kuvan tehtävään liittyvät matriisit. Materiaalin kimmomoduuli **E=70GPa** ja Poissonin vakio **ν=0,33**.

Node	x	y	u	v
5	1,0	1,0	0,2	0,3
6	1,5	1,0	-0,2	-0,4
8	1,0	1,5	0	0
9	1,5	1,5	0	0

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x \\ \gamma_x\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y}\end{Bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix}\frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}\end{Bmatrix} \quad , \quad \begin{Bmatrix}\gamma_y \\ \varepsilon_y\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y}\end{Bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix}\frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta}\end{Bmatrix} \quad , \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix}\varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_x + \gamma_y\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad , \quad \{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\}, \quad E = 70 \text{ GPA}, \ \nu = 0{,}33$$

KÄÄNNÄ !

FEM formulas **Autumn 2020**

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi) \qquad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi) \qquad H_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)^2\cdot(2+\xi), \quad H_2 = \frac{1}{4}(1-\xi)^2\cdot(\xi+1)$$

$$N_1 = -\frac{1}{2}\xi\cdot(1-\xi),\ N_2 = \frac{1}{2}\xi\cdot(1+\xi),\ N_3 = (1+\xi)\cdot(1-\xi) \qquad H_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)^2\cdot(2-\xi), \quad H_4 = \frac{1}{4}(1+\xi)^2\cdot(\xi-1)$$

$$N_1 = N_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \qquad N_2 = N_2(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = N_3(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \qquad N_4 = N_4(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$F = P + \sum_e (f_e + T_e) \qquad T^e = \iint_A N^T T dA \qquad f_e = \iiint_V N^T f dV \qquad K = \sum_e k_e \qquad M = \sum_e m_e$$

$$\xi,\eta \in [-1,1] \quad , \qquad \int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i) \qquad x = \sum_{i=1}^{n} N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} N_i y_i$$

$$\begin{bmatrix} n & \xi_i & w_i \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & \pm\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ 3 & \begin{matrix} 0 \\ \pm\sqrt{\frac{3}{5}} \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{8}{9} \\ \frac{5}{9} \end{matrix} \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \qquad \det([K] - \lambda[M]) = 0$$

$$k_e = \frac{EA_e}{\ell_e}\begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} l = \dfrac{x_2 - x_1}{\ell_e} \\ m = \dfrac{y_2 - y_1}{\ell_e} \end{matrix}, \qquad k_e = \frac{EI_Z}{l_e^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

$$m_{ec} = \frac{\rho A_e \ell_e}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad m_{ec} = \frac{\rho A_e l_e}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ 22l_e & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ 54 & 13l_e & 156 & -22l_e \\ -13l_e & -3l_e^2 & -22l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

$$m_{elu} = \frac{\rho A_e \ell_e}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad m_{elu} = \frac{\rho A_e l_e}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Choose basis functions $\mathbf{G_i}$. Determine the coefficients $\mathbf{Q_i}$ in $\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Q_i G}_i$, such that

$\int_V \phi(L\tilde{u} - P)\, dV = 0$ for every ϕ of the type $\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi_i G_i$.