TAU / Rakennettu ympäristö

Rakennustekniikka

RAK-32301 ELEMENTTIMENETELMÄN PERUSTEET, 5 op

Syksy 2019 Jarmo Poutala

1. Tentti

Kaikki laskimet sallittuja ! to 12.12.2019

Välikoe 1	Välikokeeseen 1 kuuluvat tehtävät 1, 2 ja 5. (Merkitse 1V)
Välikoe 2	Välikokeeseen 2 kuuluvat tehtävät 3, 4 ja 6. (Merkitse 2V)
Tentti	Tenttiin kuuluvat tehtävät 1-4. (Merkitse T)

$$u(x)_{Exact} = \frac{10\cdot\left(e^1+3\right)}{3\cdot\left(e^1-1\right)} - \frac{40\cdot e^{(1-x)}}{3\cdot\left(e^1-1\right)} + \dots$$

$$+\frac{4\cdot x^2}{5} - 10\cdot x - 5\cdot x^2 + \frac{5\cdot x^3}{3} + 10$$

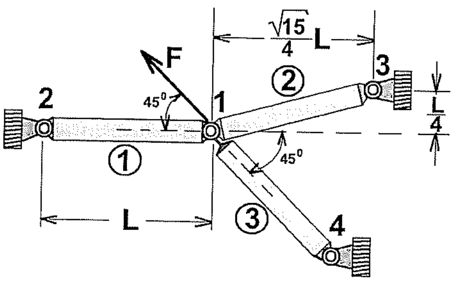
1. Ratkaise Galerkinin menetelmällä differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}=5\cdot x^2-20, \qquad x\in[0,1], \qquad u(0)=u(1)=0,$$

käyttäen seuraavia kantafunktioita

$$\mathbf{G_1 = x^2\cdot(x-1)\ ja\ G_2 = x\cdot(x-1).}$$

Vertaa saatua tulosta tarkkaan ratkaisuun, kun **x=0,5**.



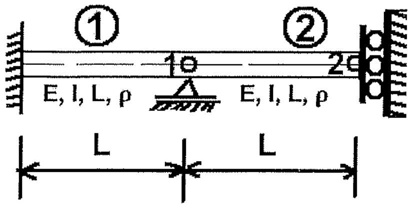
$$\sigma=\frac{E_e}{\ell_e}\begin{bmatrix}-\ell & -m & \ell & m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_1\\q_2\\q_3\\q_4\end{Bmatrix}$$

2. Määritä kuvassa olevan kolmisauvaisen ristikon sekä solmun **1** siirtymät että sauvojen **1, 2** ja **3** normaalijännitykset elementtimenetelmällä. Sauva **1** on vaakasuorassa. Solmu **3** on etäisyydellä **0,5 m** sauvan **1** muodostamasta vaakasuorasta. Sauva **3** on vaakasuoraan nähden kulmassa **45°**. Sauvojen pituus **L=2 m**. Materiaalin kimmomoduuli **E=200 GPa** ja sauvojen poikkipinta-ala **A=800 mm²** . Solmuun **1** vaikuttaa vaakasuoraan nähden kulmassa **45°** oleva voima $\mathbf{F = 90000\cdot\sqrt{2}\ N}$.

3. Määritä Gaussin kvadratuuria (integrointimenetelmiä) käyttäen tarkka ratkaisu numeerisesti integraalille

$$\mathbf{I_{xyz}} = \int_0^3\int_1^5\int_3^7 (2\cdot x^2 - x - 2)\cdot(3\cdot y+4)\cdot(4\cdot z+6)\cdot dx\cdot dy\cdot dz.$$

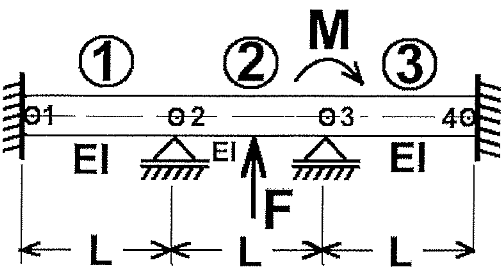
KÄÄNNÄ!



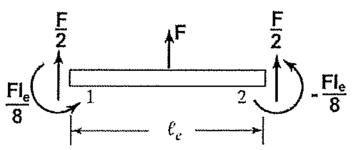
4. Ratkaise elementtimenetelmällä kuvan palkkirakenteen alimmat ominaistaajuudet ja vastaavat ominaisvektorit käyttäen konsistenttia massamatriisia. Palkin taivutusjäykkyys on **EI** . Elementtien pituus **L= 2 m**. Materiaalina olevan teräksen tiheys on ρ.

$$E = 200 \text{ GPa}, \ \ I = 8{,}356 \cdot 10^7 \text{ mm}^4, \ \ A = 5{,}38 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

$$\rho = 7850 \ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

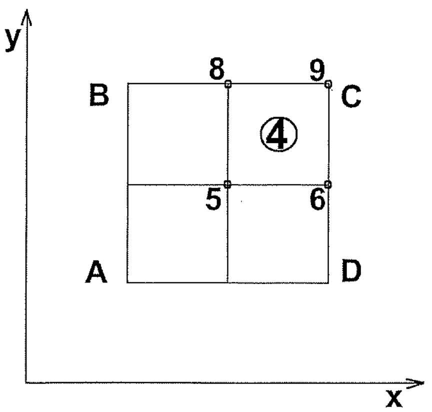


5. Määritä kuvassa olevan kolmesta palkkielementistä muodostuvan tasokehän sekä kiertymät että elementtien **1** ja **3** keskipisteiden taipumat elementtimenetelmällä. Elementit oletetaan venymättömiksi. Solmussa **3** vaikuttaa taivutusmomentti **M=100 kNm** ja elementin **2** keskellä on pistevoima **F=70 kN** ylöspäin. Elementtien pituus **L=3 m**. Materiaalin kimmomoduuli **E=200 GPa** ja palkkien poikkipinnan neliömomentti **I=10^{-4} m^4** .



$$v(\xi) = H_1 q_1 + \frac{l_e}{2} H_2 q_2 + H_3 q_3 + \frac{l_e}{2} H_4 q_4$$

$$F_1 = \frac{F}{2}, \quad F_2 = \frac{F l_e}{8}, \quad F_3 = \frac{F}{2}, \quad F_4 = -\frac{F l_e}{8}$$



6. Määritä kuvassa olevan levyrakenteen **ABCD** elementin **4** tasojännitystilan mukaiset jännitykset tämän elementin keskipisteessä. FEM-ohjelmalla saadut nelisolmuisen elementin **4** siirtymät ovat alla olevassa taulukossa. Taulukon siirtymät ovat millimetreinä ja koordinaatit metreinä. Elementin **4** leveys on **0,7 m** ja korkeus on **0,7 m**. Rakenne on jäykästi kiinni solmukohdissa **6** ja **9**. Alla ovat kuvan tehtävään liittyvät matriisit. Materiaalin kimmomoduuli **E=200GPa** ja Poissonin vakio **ν=0,3**.

Node	x	y	u	v
5	1,4	1,4	0,2	0,3
6	2,1	1,4	0	0
8	1,4	2,1	-0,1	-0,2
9	2,1	2,1	0	0

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_y \\ \varepsilon_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_x + \gamma_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad \{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\}, \quad E = 200 \text{ GPA}, \ \nu = 0{,}3$$

KÄÄNNÄ!

FEM formulas **Autumn 2019**

$$N_1(\xi)=\frac{1}{2}(1-\xi) \qquad N_2(\xi)=\frac{1}{2}(1+\xi) \qquad H_1=\frac{1}{4}(1-\xi)^2\cdot(2+\xi), \quad H_2=\frac{1}{4}(1-\xi)^2\cdot(\xi+1)$$

$$N_1=-\frac{1}{2}\xi\cdot(1-\xi),\ N_2=\frac{1}{2}\xi\cdot(1+\xi),\ N_3=(1+\xi)\cdot(1-\xi) \qquad H_3=\frac{1}{4}(1+\xi)^2\cdot(2-\xi), \quad H_4=\frac{1}{4}(1+\xi)^2\cdot(\xi-1)$$

$$N_1=N_1(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \qquad N_2=N_2(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3=N_3(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \qquad N_4=N_4(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$F=P+\sum_e(f_e+T_e) \qquad T^e=\iint_A N^T T dA \qquad f_e=\iiint_V N^T f dV \qquad K=\sum_e k_e \qquad M=\sum_e m_e$$

$$\xi,\eta\in[-1,1] \quad , \qquad \int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi\approx\sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i) \qquad x=\sum_{i=1}^{n} N_i x_i, \quad y=\sum_{i=1}^{n} N_i y_i$$

$$\begin{bmatrix} n & \xi_i & w_i \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & \pm\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ 3 & \begin{matrix} 0 \\ \pm\sqrt{\frac{3}{5}} \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{8}{9} \\ \frac{5}{9} \end{matrix} \end{bmatrix} \qquad J=\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \qquad \det([K]-\lambda[M])=0$$

$$k_e=\frac{EA_e}{\ell_e}\begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} \qquad l=\frac{x_2-x_1}{\ell_e}, \quad m=\frac{y_2-y_1}{\ell_e} \qquad k_e=\frac{EI_Z}{l_e^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

$$m_{ec}=\frac{\rho A_e\ell_e}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad m_{ec}=\frac{\rho A_e l_e}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ 22l_e & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ 54 & 13l_e & 156 & -22l_e \\ -13l_e & -3l_e^2 & -22l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

$$m_{elu}=\frac{\rho A_e\ell_e}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad m_{elu}=\frac{\rho A_e l_e}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Choose basis functions $\mathbf{G}_i$. Determine the coefficients $\mathbf{Q}_i$ in $\tilde{\mathbf{u}}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{Q}_i\mathbf{G}_i$, such that

$\int_V \phi(L\tilde{u}-P)\,dV=0$ for every ϕ of the type $\phi=\sum_{i=1}^{n}\phi_i G_i$.