MEC-4700 Simuloinnin ja optimoinnin peruskurssi

Tentti 28.1.2013

Kirjallinen materiaali ja ohjelmoitava laskin sallittuja.

Muita ohjeita:

1. Tentissä vastataan enintään **viiteen** tehtävään.
2. Tenttitehtävien 1–3 vastaukset kirjoitetaan eri paperille kuin tehtävien 4–6.
3. Jokaisessa vastauspaperissa on syytä olla nimi ja opiskelijanumero.
4. Noudattamalla ohjeita 1–3 saa yhden (1) lisäpisteen.

1. Ensimmäisen vikahetken kertymäfunktio on $F(x) = e^{-1/x}$ (x = kohteen ikä) ja vikaantuminen noudattaa jatkossa NHPP.

a) Mikä on keskimääräinen vikamäärä ikäväleillä $(0, 1]$ ja $(0, 6]$?
b) Mikä on todennäköisyys, että ikävälillä $(1, 6]$ sattuu ainakin kaksi vikaa?
c) Milloin keskimäärin tulee seuraava vika $x = 6$:n jälkeen (lauseke riittää)?

2. Laitteen vikaantumista mallinnetaan kaksivaiheisena. Olkoon X käyttöikä, kun alkava vika havaitaan. X on eksponentiaalisesti jakautunut keskiarvolla 25.2 viikkoa.

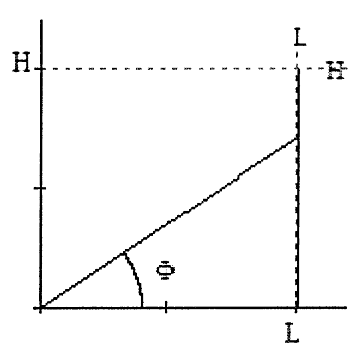
Käyttö jatkuu ja käyttöikä on $Z = X + Y$, kun laite vikaantuu lopullisesti. Jatkoelämä Y on Weibull-jakautunut keskiarvolla $\mu = a \cdot X$ ($a > 0$ vakio) ja muotoparametrilla $\beta = 2.4$. (Jatko Y riippuu siis myös X:stä.)

Muodosta (simulointia varten) Z:lle jakofunktio yhtenä lausekkeena.

Apu: Weibull-kertymäfunktio on $F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\mu}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right)^{\beta}}$.

3. Etäisyyden L päässä origosta seisoo pystysuora tolppa, jonka korkeus on H. Origosta ammutaan kohti tolppaa siten, että osumat jakaantuvat satunnaisesti mutta tasaisesti koko tolpalle. (Katso kuva! Painovoima ei vaikuta.)

a) Muodosta lähtökulmalle Φ jakofunktio ja kertymäfunktio.
b) Esitä lähtökulman Φ keskiarvoa ja varianssia vastaavat integraalilausekkeet.



Käännä

4. a) Muunna seuraava LP-probleema standardimuotoon:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = -3x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \text{ehdoilla} \quad & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 = -5 \\ & -x_1 + 7x_2 - 3x_3 \geq 6 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

b) Standardimuotoisen probleeman ratkaisu on $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}^T$. Mikä on alkuperäisen probleeman optimipiste ja -arvo?

5. a) Muuta[1] seuraava optimointitehtävä muotoon, jossa ei ole rajoitusehtoa:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 x_3^2 + x_1^2 + x_3^2 + x_2 + 2x_3 \\ \text{ehdolla} \quad & x_1^2 + x_2 = 5 \end{aligned}$$

b) Etsi muunnetun tehtävän kriittinen piste ja tarkista Hessen matriisin avulla, että kyseessä on lokaali minimipiste.

c) Mikä on a)-kohdan ratkaisu?

6. Etsi probleeman

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{x}^T \mathbf{b} \\ \text{ehdolla} \quad & \mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq c \end{aligned}$$

Karush-Kuhn-Tuckerin piste ($\mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{b} \neq 0,\ c > 0$).

[1] Ratkaise rajoitusehdosta jompikumpi muuttuja toisen funktiona.

Käännä