MEC-4700 Simuloinnin ja optimoinnin peruskurssi

Tentti 13.12.2011

Kirjallinen materiaali ja laskuvälineet sallittuja.

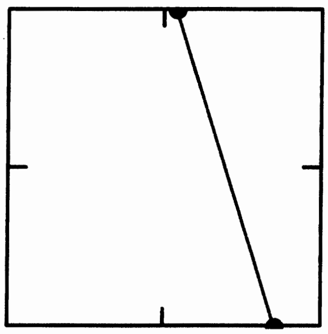
Muita ohjeita:

1. Tentissä vastataan enintään viiteen tehtävään.
2. Tenttitehtävien 1–3 vastaukset kirjoitetaan eri paperille kuin tehtävien 4–6.
3. Jokaisessa vastauspaperissa on syytä olla nimi ja opiskelijanumero.
4. Optimoinnin välikoe alkaa sivulta 3, siinä ei ole vaihtoehtoisia kysymyksiä.
5. Sekä tenttiin että välikokeeseen saa osallistua.
6. Tenttitehtävien 4–6 ja välikokeen vastaukset saavat olla samalla paperilla, kannattaa kuitenkin merkitä, osallistuuko vain toiseen tai molempiin.
7. Tenttitehtävä 4 ja välikokeen tehtävä 1 ovat samat.
8. Jos ohjeita 1–3 on noudatettu, saa tentistä yhden (1) lisäpisteen.

1. Tarkastellaan satunnaissuuretta $X = a \cdot \sqrt{U} + b \cdot V$, missä U ja V ovat riippumattomia satunnaissiemeniä, eli tasaisesti jakautuneita välillä $(0, 1)$.

Miten on valittava vakiot a ja b, jotta keskiarvo olisi μ ja keskihajonta σ? (Eli: Lausu a ja b lausekkeina μ:stä ja σ:sta.) Minkälaisilla pareilla (μ, σ) ratkaisua ei ole?

2. Kun yksikköneliön vastakkaisilta sivuilta otetaan satunnaiset pisteet, näitä yhdistävä jana jakaa neliön kahteen osaan. Olkoon X osien pinta-alojen suhde (satunnaissuure).



a) Muodosta X:lle jakofunktio.

b) Näytä ja selitä, miten tekisit X:lle kertymäfunktion simuloimalla.

c) Esitä X:n keskiarvo integraalilausekkeena.

d) Mikä on X:n tarkka keskiarvo?

3. Kohteen vikataipumus on $\Lambda(x) = 6 \cdot \sqrt{-\ln\left(1 - \frac{x}{18}\right)}$, $x =$ kumuloituva käyttöikä.

a) Milloin vikataajuus on pienimmillään?

b) Mikä on kohteen maksimaalinen käyttöikä?

Oletetaan lisäksi, että vikahetket noudattavat NHPP-prosessia.

c) Mikä on todennäköisyys, että välille $x = 5 \ldots 13$ sattuu ainakin kaksi vikaa?

d) Esitä 2. vikahetken jakofunktio, kun 1. vika sattui, kun $x = 2.5$.

Käännä

4. a) Muunna seuraava LP-probleema standardimuotoon:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = -3x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \text{ehdoilla} \quad & -x_1 + 7x_2 - 3x_3 \geq 6 \\ & x_1 - x_2 - x_3 = -7 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \leq 0 \\ & x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

b) Standardimuotoisen probleeman ratkaisu on $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 37 & 0 \end{bmatrix}^T$. Mikä on alkuperäisen probleeman optimiarvo?

5. Seuraavasta funktiosta tiedetään, että A on symmetrinen.

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c.$$

Lisäksi pisteessä $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$: $f(\mathbf{x}_1) = 3$, $\nabla f(\mathbf{x}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ ja $Hf(\mathbf{x}_1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Laske funktion minimipiste ja -arvo sekä tarkista, että saatu piste on lokaali minimipiste.

6. Etsi seuraavan probleeman molemmat Karush-Kuhn-Tuckerin pisteet:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ \text{ehdoilla} \quad & (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 2 \\ & (x_1 + 1)^2 + x_2^2 \geq 2 \end{aligned}$$

Käännä

MEC-4700 Simuloinnin ja optimoinnin peruskurssi

2. välikoe, optimoinnin osuus **13.12.2011**

Kirjallinen materiaali ja laskuvälineet sallittuja.

1. a) Muunna seuraava LP-probleema standardimuotoon:

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & z = -3x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \text{ehdoilla} \quad & -x_1 + 7x_2 - 3x_3 \geq 6 \\ & x_1 - x_2 - x_3 = -7 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \leq 0 \\ & x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

b) Standardimuotoisen probleeman ratkaisu on $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 37 & 0 \end{bmatrix}^T$. Mikä on alkuperäisen probleeman optimiarvo?

2. Tarkastellaan seuraavaa LP-probleemaa:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & z = 4x_1 - x_2 + 7x_3 + x_4 + 8x_5 + 10x_6 - 5x_7 \\ \text{ehdoilla} \quad & x_1 - 3x_2 + x_4 + 7x_6 - x_7 = 8 \\ & -3x_1 + 4x_3 - x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 100 \\ & x_2 - 2x_3 + x_4 - 8x_5 + 9x_6 + 12x_7 = -21 \\ & x_1 - 2x_3 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 - 6x_6 + 7x_7 = -8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

Probleemaa on ratkaistu simplexillä ja päädytty seuraavaan taulukkoon:

	1	7	5	
2	-0.6425	1.7195	-1.3167	6.7149
4	-0.4683	-5.9932	0.9593	18.5633
6	-0.0656	1.4502	-0.7014	1.3688
3	-0.8507	-1.6109	0.6652	29.2986
	10.4367	-0.5136	8.0814	230.6267

a) Miksi saatu kantaratkaisu ei ole optimaalinen?

b) Mikä muuttuja on tuotava kantaan?

c) Mikä muuttuja poistetaan kannasta ja miksi?

Käännä

3. Alla annettuihin datapisteisiin on pienimmän neliösumman menetelmällä sovitettava funktio

$$f(t, x_1, x_2, x_3) = x_1 t^2 + x_2 e^{t-1} + x_3.$$

t	0	1	2	3
$f(t)$	4	6	12	25

a) Kirjoita sovitusproblеема muodossa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (A ja $\mathbf{b}$ komponenteittain näkyviin.)

b) Tehtävää ei tarvitse ratkaista, mutta jos käytössä olisi Matlab, niin miten sillä saisi ratkaisun laskettua?

4. a) Kirjoita seuraavan probleeman Karush-Kuhn-Tuckerin ehdot:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & 1800 \ln x_1 + x_1 x_2 - 2x_2^2 \\ \text{ehdoilla} \quad & x_1 + 2x_2 - 60 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 - 66 = 0 \end{aligned}$$

b) Tutki, ovatko seuraavat pisteet KKT-pisteitä:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 72 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 71 \end{bmatrix}.$$

Käännä