MEC-2410 Materiaalien mekaniikka

1. välikoe 8.3.2013

1. Tasojännitystilass olevaa materiaalikappaletta koestetaan jännitystilassa $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_0$ ja $\sigma_{12} = \alpha\sigma_0$, jossa α on dimensioton parametri. Määritä deviatorinen jännitysmatriisi $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}$ sekä deviaattorimatriisin toinen invariantti $J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ji}$, ja jossa $\boldsymbol{\sigma}$ on jännitysmatriisi. Määritä myös niin sanottu von Misesin tehollinen jännitys, joka määritellään yhtälöllä $\sigma_{\mathrm{eff}} = \sqrt{3J_2}$. Määritä lisäksi leikkausjännityksen maksimiarvo dimensiottoman parametrin α arvolla 1 ja taso (tai tasot) missä se esiintyy.

2. Kappaleen kuormittamattomaan pintaan on liimattu kolme venymäliuskaa A,B, ja C. Venymäliuska A mittaa vaakasuuntaista venymää (x-akselin suunta) ja venymäliuska C sitä vastaan kohtisuoran suunnan venymää (y-akselin suunta). Venymäliuska B puolittaa suuntien A ja C välisen kulman, eli on liuskoja A ja C vastaan 45 asteen kulmassa. Liuskoista A,B ja C mitataan venymät $\varepsilon_A = 0,0002$, $\varepsilon_B = 0,0009$ ja $\varepsilon_C = 0,001$. Määritä päävenymät ja pääsuunnat.

3. Deformaatiokuvaus määritellään lausekkeilla

$$x_1 = \tfrac{1}{4}(18 + 4X_2 + 6X_2), \quad x_2 = \tfrac{1}{4}(14 + 6X_2), \quad x_3 = X_3.$$

   Piirrä alkutilassa olevan yksikköneliön $\mathcal{B} = \{0 \leq X_1, X_2 \leq 1\}$ kuva deformoituneessa tilassa. Määritä siirtymävektori $\boldsymbol{u}$, deformaatiogradientti $\mathbf{F} = \boldsymbol{I} + \partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{X}$ ja Greenin-Lagrangen muodonmuutosmatriisi $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{F} - \mathbf{I})$. Laske Greenin-Lagrangen muodonmuutosmatriisin avulla alukutilassa pisteiden $(0,0)$ ja $(1,1)$ muodostaman lävistäjän pituus deformoituneessa tilassa.

4. Isotrooppinen hyperelastinen materiaalimalli on lausuttu muodossa

$$\boldsymbol{\sigma} = KI_1\boldsymbol{I} + 2G\boldsymbol{e},$$

   jossa K on materiaalin kokoonpuristuvuusmoduuli ja G leikkausmoduuli. Venymämatriisin $\boldsymbol{\varepsilon}$ ensimmäinen invariantti on $I_1 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$ ja sen deviatorinen osa $\boldsymbol{e}$ määritellään $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{I}$. Materiaalikokeissa on havaittu kokoonpuristuvuusmoduulin K riippuvan suhteellisesta tilavuudenmuutoksesta I_1, mutta ei venymäinvariantista $J_2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{e}^2)$. Mitä rajoitteita tämä asettaa leikkausmoduulille? Mikäli kokoonpuristuvuusmoduulille otaksutaan lauseke $K = K_0(1 + \alpha I_1^2)$, jossa α on dimensioton positiivinen vakio, määritä keskimääräisen jännitykse $\sigma_{\mathrm{m}} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})$ ja suhteellisen tilavuudenmuutoksen $\varepsilon_{\mathrm{vol}} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = I_1$ välinen riippuvuus.

Välikokeessa ei sallita kaavakokoelmaa eikä muutakaan kirjallista materiaalia. Laskin (funktio tai ohjelmoitava) saa olla mukana.