

MAT-60100 Kompleksimuuttujan funktiot
2. Välikoe 5.12. 2013 klo 12-14.

Ei muistiinpanoja, laskimia, taulukoita. Kirjoita koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ja koulutusohjelmasi. Vastaukset perusteltava.

1. Tarkastellaan potenssisarjaa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.
- a) Määrittele yo. potenssisarjan suppenemissäde.
 - b) Osoita, että jos yo. potenssisarja suppenee pisteessä $z = z_1 \neq 0$, niin se suppenee kun $|z| < z_1$.

2. Etsi funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$$

Laurentin sarja joka suppenee, kun $0 < |z| < 1$ (ts. origon ympäristössä). Osoita saamastasi Laurentin sarjasta mikä on pisteessä $z=0$ olevan navan kertaluku.

3. Laske tehtävän 2 funktion integraali pitkin sulkeutuvaa, yksinkertaista ja sileätä integroimistietä, jonka sisään jää
- a) piste $z=0$ ja $z=-1$
 - b) piste $z=0$ mutta ei pistettä $z=-1$
 - c) piste $z=-1$ mutta ei pistettä $z=0$
 - d) kumpikaan pisteistä $z=0$ tai $z=-1$ ei ole integroimistien sisällä.
4. Ratkaise alkuarvoprobleema

$$y''(t) - y(t) = e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad t \geq 0$$

Laplace-muunnoksen avulla. Vastauksena halutaan funktio $y(t)$.