

MAT-33311 Tilastomatematiikka 1 — tentti 13.5.2013
MAT-33317 Statistics 1 — exam 13.5.2013

prof. Robert Piché

Tentissä saa käyttää tavallista tai graafista/ohjelmoitavaa laskinta ja yhtä kaksipuolista käsinkirjoitettua A4-paperia muistiinpanoja. Laskuissa välivaiheet on kirjoitettava näkyviin. Tenttipaperi sisältää standardinormaalijakauman kertymäfunktion taulukko.

You are allowed to use a plain or graphing/programmable calculator and one handwritten two-sided A4 sheet of notes. Show your calculations. The exam question sheet includes a table of the standard normal cumulative distribution function.

1. Kun ostoskeskus Duossa haastateltiin 10 teini-ikäistä, 9 heistä tykkäsi enemmän Mad Cow Enthusiasm DrinkTM:stä kuin vaihtoehdoista juomasta (rasvaton piimä). (a) Olkoon θ suhteellinen osuus suomalaisista teini-ikäisistä, jotka tykkäävät enemmän MCED:stä kuin rasvattomasta piimästä. Mikä on posteriori todennäköisyys, että $\theta > 0.80$? Käytä priori jakauma $\theta \sim \text{beta}(1, 1)$. (b) Olettaen, että havaittu osuus MCED-tykkääjistä pysyy 0.8 tienoilla, kuinka monta teini-ikäistä on haastateltava, jotta parametrin θ posteriori keskihajonta olisi korkeintaan 0.01?

Of 10 teenagers interviewed at the Duo shopping mall, 9 preferred Mad Cow Enthusiasm DrinkTM over the alternative (low-fat buttermilk). (a) Let θ denote the proportion of teenagers in Finland who prefer MCED over low-fat buttermilk. What is the posterior probability that $\theta > 0.80$? Use the prior distribution $\theta \sim \text{beta}(1, 1)$. (b) Assuming that the observed proportion of MCED preferers remains around 0.8, how many survey participants are needed in order to determine θ with a posterior standard deviation of at most 0.01?

2. Mitattiin viiden Coffin NailTM -savukkeen tervapitoisuudet (mg):

14.4, 14.2, 14.4, 14.3, 14.6

(a) Piirrä otoskertymä ja etsi sitä käyttäen otosmediaani (“määritelmä 1”). (b) Olkoon μ_{cn} Coffin NailTM -savukkeiden keskimääräinen tervapitoisuus. Mikä on parametrin μ_{cn} posteriori jakauma? Kerro priori jakauma ja otosmalli. (c) Mikä on posteriori todennäköisyys, että $\mu_{\text{cn}} \leq 14.5$?

The measured tar content (in mg) of 5 Coffin NailTM cigarettes was

14.4, 14.2, 14.4, 14.3, 14.6

(a) Draw the empirical cumulative distribution function and use it to find the sample median (“definition 1”). (b) What is the posterior distribution of μ_{cn} , the average tar content of Coffin NailTM cigarettes? State the prior distribution and the sampling model. (c) Find the posterior probability that $\mu_{\text{cn}} \leq 14.5$.

3. (Jatkuu) (a) Olkoon σ_{cn} Coffin NailTM -savukkeiden keskihajonta. Etsi parametrin σ_{cn} posteriori mediaani. (Vihje: $\kappa = 1/\sigma^2$) (b) Kun mitattiin 12 Red AppleTM savukkeen pitoisuudet, otoskeskiarvo oli 14.7 mg ja otoskeskihajonta oli $s = 0.3$ mg. Etsi posteriori todennäköisyys, että $\mu_{\text{cn}} \leq \mu_{\text{ra}}$, olettaen, että tarkuudet ovat samat eli $\kappa_{\text{cn}} = \kappa_{\text{ra}}$.

(Continuation.) (a) Find the posterior median of σ_{cn} , the standard deviation of tar content of Coffin NailTM cigarettes. (Hint: $\kappa = 1/\sigma^2$) (b) The tar content of 12 Red AppleTM cigarettes had sample mean 14.7 mg and sample standard deviation $s = 0.3$ mg. Find the posterior probability that $\mu_{\text{cn}} \leq \mu_{\text{ra}}$, assuming equal precisions, i.e. $\kappa_{\text{cn}} = \kappa_{\text{ra}}$.

4. Eräessä koesarjassa x g sublimoitua tiotimoliinia lisättiin paristojen tuotannossa ja mitattiin pariston eliniän pidentyminen (y tuntia):

x	0	1	2	3	4
y	2	4	3	7	9

(a) Olkoon β_1 lineaarisen regressiomallin

$$y_i | \beta_0, \beta_1, \kappa \sim \text{norm}(\beta_0 + \beta_1(x_i - \bar{x}), \frac{1}{\sqrt{\kappa}})$$

kulmakerroin. Mikä on posteriori todennäköisyys, että $\beta_1 > 0$? (b) Etsi korrelaatiokertoimen ρ posteriori mediaani ja 95% luottamusväli.

In a series of experiments, x g of sublimated thiotimoline was added in the manufacture of some dry cell batteries and the added lifetime y (in hours) of the battery was measured:

x	0	1	2	3	4
y	2	4	3	7	9

(a) Find the posterior probability that the slope β_1 of a simple linear regression model

$$y_i | \beta_0, \beta_1, \kappa \sim \text{norm}(\beta_0 + \beta_1(x_i - \bar{x}), \frac{1}{\sqrt{\kappa}})$$

is positive. (b) Find the posterior median and a 95% credibility interval for the correlation coefficient ρ .

		$\Phi(u_1 + u_2)$									
		$u_2=0$.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
$u_1=0$.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
	.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
	.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
	.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
	.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
	.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
	.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
	.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
	.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
	.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
	1	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
	1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
	1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
	1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
	1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
	1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
	1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
	1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
	1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
	1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
	2	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
	2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
	2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
	2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
	2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
	2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
	2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
	2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
	2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
	2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
	3	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990