MAT-31102 Numeerinen analyysi: tentti 28.2.2011
MAT-31107 Numerical Analysis Exam: 28.2.2011

Tentissä saa käyttää tavallista tai graafista/ohjelmoitavaa laskinta ja yhtä kaksipuolista käsinkirjoitettua A4-paperia muistiinpanoja. Laskuissa välivaiheet on kirjoitettava näkyviin.

You are allowed to use a plain or graphing/programmable calculator and one handwritten two-sided A4 sheet of notes. Show all calculation steps.

√

1. Eräs tietokone käyttää liukulukujärjestelmää $(\beta, t, L, U) = (2, 27, -510, 511)$. Etsi pyöristysyksikkö μ, pienin positiivinen normalisoitu luku `realmin` ja suurin äärellinen positiivinen luku `realmax`. Miksi alla oleva MATLAB-ohjelma laskee "ikuisesti" tällä tietokoneella? (MATLAB-lauseke `x ~= 1` tarkoittaa $x \neq 1$.)

```
x=0;
while x ~= 1
  x = x + 0.1;
end
```

   A computer uses the floating point number system $(\beta, t, L, U) = (2, 27, -510, 511)$. Find the unit roundoff μ, the smallest normalized positive number `realmin` and the largest finite positive number `realmax`. Why does the above MATLAB program take "forever" when executed on this computer? (The MATLAB syntax `x ~= 1` means $x \neq 1$.)

√

2. Keplerin yhtälö erään satelliitin sijainnin määrittämiseksi elliptisellä radalla on $x = 1.51 + 0.42 \cdot \sin x$. Todista, että kiintopisteiteraatio $x_{k+1} = 1.51 + 0.42 \cdot \sin x_k$ suppenee (tekemättä iteraatioita!). Etsi yhtälön ratkaisu Newtonin ja Raphsonin menetelmän avulla; käytä alkuarvona $x_0 = 2$.

   Kepler's equation for determining the position of a certain satellite moving in an elliptical orbit is $x = 1.51 + 0.42 \cdot \sin x$. Prove that the fixed-point iteration $x_{k+1} = 1.51 + 0.42 \cdot \sin x_k$ converges (without doing any iterations!). Solve the equation using the Newton-Raphson method with starting point $x_0 = 2$.

3. Arvioi integraalin $\bar{a} = \int_0^5 \frac{1}{e^x + x} dx$ absoluuttinen virhe epäoleellisen integraalin $a = \int_0^\infty \frac{1}{e^x + x} dx$ likiarvona. Laske $\bar{a}$ käyttäen Rombergin menetelmää: laske Rombergin taulukon kolme saraketta, eli puolisuunnikassäännön sarake ja kaksi seuraavaa saraketta.

   Estimate the absolute error of the definite integral $\bar{a} = \int_0^5 \frac{1}{e^x + x} dx$ as an approximation of the improper integral $a = \int_0^\infty \frac{1}{e^x + x} dx$. Compute $\bar{a}$ using the Romberg method: compute three columns of the Romberg table, that is, the trapezoid rule column and two following columns.

4. (a) Mitkä ovat ortogonaalisten polynomien edut verrattuna standardipolynomiien, kun polynomeja sovitetaan dataan?

   Explain the advantages of using orthogonal polynomials instead of standard polynomials to fit polynomials to data.

   (b) Etsi alla olevan datan astetta ≤ 2 olevan pienimmän neliösumman polynomisovitteen kerrointen normaaliyhtälöiden matriisimuoto. Yhtälöitä ei tarvitse ratkaista.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	8	10	9	6	1

   Write the matrix form of the normal equations for the coefficients of the degree ≤ 2 polynomial least squares fit of the data. You do not need to solve the equations.

   (c) (jatkuu) Etsi sellaiset astetta 0, 1 ja 2 olevat polynomit, jotka ovat ortogonaalisia sisätulon $(f, g) = \sum_{i=1}^5 f(x_i) g(x_i)$ suhteen.

   (continued) Find polynomials of degree 0, 1 and 2 that are orthogonal with respect to the inner product $(f, g) = \sum_{i=1}^5 f(x_i) g(x_i)$.