Algoritmimatematiikka

Tentti 07.09.2009

Ei laskinta tai kirjallista materiaalia. Tautologia- ja interferenssikokoelma kääntöpuolella.

1. Tarkastellaan joukkoa $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

   (a) Muodosta joukossa A kaksi eri ekvivalenssirelaatiota, joista kumpikin toteuttaa ehdot $0R1$ ja $3R0$.

   (b) Ilmoita kummallekin kohdassa (a) keksimällesi relaatiolle ekvivalenssiluokka $[0]$.

   (c) Selitä, miksi kumpikaan kohdassa (a) keksimistäsi ekvivalenssirelaatioista ei voi olla osittainen järjestys.

2. Todista $\neg(p \wedge (q \wedge p)) \vee \neg q = p \to q$

   (a) totuustaululla.

   (b) ilman totuustaulua.

3. Funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on annettu prefix-muodossa $f(x) = (\mathrm{prod} \circ \langle id, id \rangle)(x)$, missä esiintyvä funktio prod tarkoittaa tuloa.

   (a) Esitä vaiheittain, kuinka muunnat funktion f infix-muotoon.

   (b) Todista induktiolla: $\sum_{i=1}^{n} \frac{f(i)}{i} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$.

   Vihje: Käytä funktion f infix-muotoa todistuksessa ja sievennä.

4. Kelmien ja ritarien saarella osa asukkaista puhuu aina totta (ritarit) ja loput asukkaat (kelmit) valehtelevat aina.

   (a) Miten ilmaiset predikaattilogiikan avulla tässä tehtävässä yllä annetun tiedon asukkaiden totuudenpuhumisesta?

   Vihje: Nimeä aluksi saarelaisten joukko.

   (b) Käytä interferenssisääntöjä (ei totuustaulua) seuraavaan vastatessasi: Tapaat kaksi saaren asukasta, a ja b. Heistä a sanoo: "Jos b ei ole ritari, minä olen kelmi." Kumpaa saarelaisryhmää edustaa a, entä b?

   Huom: Päättely ilman interferenssisääntöjen käyttöä: max 1p.

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

Negaatio	Disjunktio	Konjunktio	Implikaatio
$\neg\neg p = p$	$p \vee \mathbf{t} = \mathbf{t}$	$p \wedge \mathbf{t} = p$	$p \to \mathbf{t} = \mathbf{t}$
	$p \vee \mathbf{e} = p$	$p \wedge \mathbf{e} = \mathbf{e}$	$p \to \mathbf{e} = \neg p$
	$p \vee p = p$	$p \wedge p = p$	$\mathbf{t} \to p = p$
	$p \vee \neg p = \mathbf{t}$	$p \wedge \neg p = \mathbf{e}$	$\mathbf{e} \to p = \mathbf{t}$
			$p \to p = \mathbf{t}$
			$p \to q = \neg p \vee q$
			$p \to q = \neg q \to \neg p$
			$\neg(p \to q) = p \wedge \neg q$

Vaihdantalait	Liitäntälait	Osittelulait
$p \wedge q = q \wedge p$	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee q = q \vee p$	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

De Morganin lait	Absorptio
$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$	$p \wedge (p \vee q) = p$
$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$	$p \vee (p \wedge q) = p$
	$p \wedge (\neg p \vee q) = p \wedge q$
	$p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$

Inferenssisääntöjä

MP $\dfrac{A,\ A \to B}{\therefore B}$	**MT** $\dfrac{A \to B,\ \neg B}{\therefore \neg A}$	**Conj** $\dfrac{A,\ B}{\therefore A \wedge B}$	**Simp** $\dfrac{A \wedge B}{\therefore A}$
Add $\dfrac{A}{\therefore A \vee B}$	**DS** $\dfrac{A \vee B,\ \neg B}{\therefore A}$	**HS** $\dfrac{A \to B,\ B \to C}{\therefore A \to C}$	

muista rajoitukset

UI $\dfrac{\forall x\, W(x)}{\therefore W(t)}$	**UG** $\dfrac{W(t)}{\therefore \forall x\, W(x)}$	**EG** $\dfrac{W(t)}{\therefore \exists x\, W(x)}$	**EI** $\dfrac{\exists x\, W(x)}{\therefore W(t)}$

Ekvivalensseja

$\neg\forall x\, W(x) = \exists x\, \neg W(x)$	$\neg\exists x\, W(x) = \forall x\, \neg W(x)$
$\exists x\, (A(x) \vee B(x)) = \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$	$\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) = \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$
$\exists x\, (A(x) \to B(x)) = \forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$	$\forall x\, \forall y\, W(x,y) = \forall y\, \forall x\, W(x,y)$
$\exists x\, \exists y\, W(x,y) = \exists y\, \exists x\, W(x,y)$	

$\forall x\, (C \vee A(x)) = C \vee \forall x\, A(x)$	$\forall x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \forall x\, A(x)$
$\exists x\, (C \vee A(x)) = C \vee \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (C \to A(x)) = C \to \forall x\, A(x)$	$\exists x\, (C \to A(x)) = C \to \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (A(x) \to C) = \exists x\, A(x) \to C$	$\exists x\, (A(x) \to C) = \forall x\, A(x) \to C$

Implikaatioita

$\forall x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$
$\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$	$\forall x\, (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \to \forall x\, B(x)$
$\exists y\, \forall x\, W(x,y) \Rightarrow \forall x\, \exists y\, W(x,y)$	