

MAT-20500 Todennäköisyyslaskenta

Tentti 19.10.2010

- Vastaa jokainen tehtävä eri paperille.
 - Funktiolaskin sallittu
-

1. a) Pelissä on 2 pelaajaa A ja B. Palkinnon 1600 € saa pelaaja, joka ensiksi voittaa 6 erää. Oletetaan, että molemmilla pelaajilla on yhtäsuuri todennäköisyys voittaa yksittäinen erä. Peli keskeytetään tilanteessa, jossa pelaajalla A on 5 erävoittoa ja pelaajalla B on 3 erävoittoa. Jos perusteena pidetään todennäköisyyttä voittaa koko peli, niin miten palkinto tulisi oikeudenmukaisesti jakaa pelaajien kesken.

b) Olkoon $P(\bar{A} \cap B) = 0.2$ ja $P(A | B) = 0.7$. Laske $P(B)$.

2. Määritä tapahtuman $P(X \geq 3)$ todennäköisyys seuraavissa tapauksissa. Esitä vastaus tarkkana arvona tai lähimpänä määritettävissä olevana arvona.

a) $X \sim \text{Tas}(0, 3)$

b) $X \sim \text{Tasd}(0, 3)$

c) $X \sim \text{Poi}(3)$

d) $X \sim t(13)$

e) $\Omega_X = [0, 4]$ ja tiheysfunktio $f(x) = x/8$.

f) Kertymäfunktio välillä $[0, 6]$ on $F(x) = x^2/36$

3. a) Arpajaisissa joka viides arpa voittaa 10 €. Arvan hinta on 2.5 €. Henkilö ostaa arpoja 20 €:lla. Millä todennäköisyydellä hänen ostamiensa arpojen voittosumma on vähintään 20 €.

b) Toinen henkilö ostaa arpoja 200 €:lla. Millä todennäköisyydellä hän saa omansa takaisin eli voittaa vähintään 200 €. Käytä laskemisessa normaaliapproksimaatiota.

4. Satunnaisvektorin (X, Y) tiheysfunktio $f(x, y) = 2$, kun $0 \leq x \leq y \leq 1$.

Laske $\text{Cov}(X, Y)$ ja $\text{Corr}(X, Y)$. Ovatko X ja Y riippumattomia?

MAT-20501 Todennäköisyyslaskenta, kaavoja ja taulukoita

1. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$
4. $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
5. $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P\left(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$
6. $P(B_k | A) = \frac{P(B_k)P(A | B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i)}$
7. Riippumattomuus: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
8. $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$
9. $E(X) = \sum_{x \in \Omega} x f(x) = \mu$, $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \mu$
10. $\text{Var}(X) = \sum_{x \in \Omega} (x - \mu)^2 f(x) = \sigma^2$, $\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \sigma^2$
11. $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
12. $D(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sigma$
13. $X : f(x), Y = h(X), g(y) = f(h^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} h^{-1}(y) \right|$

14. $E(h(X)) = \sum_{x \in \Omega} h(x)f(x)$, $E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x) dx$
15. $E(aX + b) = aE(X) + b$, $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$
16. $P(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$, $\forall t > 0$
17. $\text{Exp}(\lambda) : f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, $\lambda > 0$, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
18. $\text{Bin}(n, p) : f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, 2, \dots, n$,
 $E(X) = np$, $\text{Var}(X) = np(1-p)$
19. $\text{Poi}(\lambda) : f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$, $x = 0, 1, 2, \dots$, $E(X) = \lambda$, $\text{Var}(X) = \lambda$
20. Riippumattomuus: $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$
21. $\text{Cov}(X, Y) = E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) = E(XY) - E(X)E(Y) = \sigma_{XY}$
22. $\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \rho_{XY}$
23. $\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y)$
24. $\text{Jos } X \sim N(\mu, \sigma^2)$, niin $z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$
25. $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
26. $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)$
27. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
28. $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
29. $F = \frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2} \sim F(n_X - 1, n_Y - 1)$

Normaalijakauman N(0,1) kertymäfunktion arvoja $\Phi(x)=P(z\leq x)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

t-jakauman t(df) kriittisiä pisteitä c: $F(c)=P(t\leq c)=1-\alpha$

df	α								
	0.40	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0005	
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619	
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.599	
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924	
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610	
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869	
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959	
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408	
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041	
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781	
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587	
11	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437	
12	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318	
13	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221	
14	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140	
15	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073	
16	0.258	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015	
17	0.257	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965	
18	0.257	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922	
19	0.257	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883	
20	0.257	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850	
21	0.257	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819	
22	0.256	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792	
23	0.256	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768	
24	0.256	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745	
25	0.256	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725	
26	0.256	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707	
27	0.256	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690	
28	0.256	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674	
29	0.256	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659	
30	0.256	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646	
40	0.255	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551	
80	0.254	0.678	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.416	
120	0.254	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373	
∞	0.253	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291	

F-jakauman kriittisiä pisteitä c: $P(F\leq c)=0.95$, kun $F=F(df1, df2)$

χ^2 -jakauman $\chi^2(df)$ kriittisiä pisteitä c: $F(c)=P(w\leq c)=1-\alpha$

df	α									
	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.792	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85				