

**MAT-20401 Vektorianalyysi**
Tentti 21.12.2011

Ei laskinta eikä taulukkokirjoja. Kaavaliite on ohessa.

1. Laske kentän $\mathbf{F}(x, y, z) = -3y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k}$ käyräintegraali yli käyrän $\mathbf{r}(t) = (2t + 1, t^2 + t, e^t)$, $0 \leq t \leq 1$.
2. Olkoon lanka käyrän $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4, y \geq 0\}$ muotoinen ja olkoon langan pituustiheys $\delta(x, y) = 3 - y$. Laske langan hitausmomentti y -akselin suhteen eli

$$I_y = \int_C x^2 \delta(x, y) ds.$$

3. Laske pallopinnan $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ massakeskipiste, kun pintatiheys $\delta(x, y, z) =$ etäisyyden neliö "etelänavalta" $(0, 0, -a)$.
4. Laske kentän $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vuo joukon

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$$

reunapinnan läpi joukosta T poispäin.

MAT-20401 Vektorianalyysi, tentin kaavaliite

1. $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$, $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$

2. $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g$
 $\nabla \cdot (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{G} + f(\nabla \cdot \mathbf{G})$
 $\nabla \times (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \times \mathbf{G} + f(\nabla \times \mathbf{G})$
 $\nabla[h(f(\mathbf{r}))] = h'(f(\mathbf{r}))\nabla f(\mathbf{r})$

3. $\oint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$

4. $\oint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F} dx dy$

5. $\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F} dV$

6. $\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$

7.
$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \implies dx dy dz = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

8. $\mathbf{N}(\phi, \theta) = a^2 \sin \phi (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$, $\|\mathbf{N}(\phi, \theta)\| = a^2 \sin \phi$

9. Massa ja massakeskipiste. Käyrälle C :

$$m = \int_C \delta ds, \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x \delta ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_C y \delta ds, \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \int_C z \delta ds.$$

Pinnalle S :

$$m = \iint_S \delta dS, \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \iint_S x \delta dS, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint_S y \delta dS, \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \iint_S z \delta dS.$$

10. $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$, $\sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$, $\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$