$\nabla f(r) = f'(r)\,\frac{\mathbf{r}}{r}$

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

MAT-20401 Vektorianalyysi
Tentti 21.2.2011

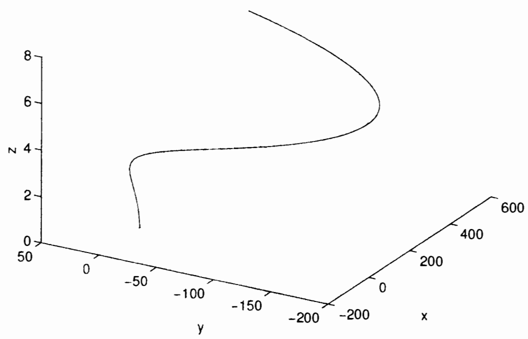
Ei laskintaa eikä taulukkokirjoja. Kaavaliite on ohessa.

1. Laske oheisen kuvan mukaisen tasa-aineisen (pituustiheys $\delta = 1$) eksponentiaalisesti laajenevan ruuvikäyrän

$$\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t,\ e^t \sin t,\ t), \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

hitausmomentti z-akselin suhteen eli

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\delta\, ds.$$



2. a) Olkoon $f(x, y, z) = -\dfrac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$. Laske ∇f.

b) Laske **a**-kohtaa hyödyntäen voimakentän

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{10\mathbf{r}}{r^5} \qquad (\mathbf{r} = (x, y, z),\ r = \|\mathbf{r}\|)$$

tekemä työ, kun voimakentän vaikutuspiste siirtyy etäisyydeltä 1 etäisyydelle 5 origosta.

3. Olkoon S pinnan $y^2 = 4 - z$ se (rajoitettu) osa, jota rajoittavat tasot $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$ ja $y = 3$ (m). Laske S:n muotoisen levyn massa, kun pintatiheys on $\delta(x, y, z) = y$ (g/m^2).

4. Olkoon S a-säteisen origokeskisen pallopinnan ensimmäisessä koordinaattikahdeksanneksessa oleva osa. Laske kentän $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{k}$ vuo pinnan S läpi ylöspäin.

Tehtäväkohtaiset tulokset julkaistaan POPissa periodin 2/2010–2011 toteutuskerran sivulla.

MAT-20401 Vektorianalyysi, tentin kaavaliite

1. **(1)** $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$

(2) $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

(3) $\nabla(\mathbf{F} \bullet \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F}$

(4) $\nabla \bullet (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \bullet (\nabla \times \mathbf{G})$

(5) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \bullet \mathbf{G}) - (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F} - \mathbf{G}(\nabla \bullet \mathbf{F})$

(6) $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g$

(7) $\nabla \bullet (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \bullet \mathbf{G} + f(\nabla \bullet \mathbf{G})$

(8) $\nabla \times (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \times \mathbf{G} + f(\nabla \times \mathbf{G})$

(9) $\nabla[h(f(\mathbf{r}))] = h'(f(\mathbf{r}))\nabla f(\mathbf{r})$

2. $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, \quad \mathbf{n}(t) = \dfrac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}, \quad \kappa(t) = \dfrac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \dfrac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{v^3},$

$a_T = v', \quad a_n = \kappa v^2$

3. $\displaystyle\oint_{\partial R} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$

4. $\displaystyle\oint_{\partial R} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, ds = \iint_R \nabla \bullet \mathbf{F}\, dx\, dy$

5. $\displaystyle\iint_{\partial T} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, dS = \iiint_T \nabla \bullet \mathbf{F}\, dV$

6. $\displaystyle\oint_{\partial S} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, dS$

7. $\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad dx\, dy\, dz = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

8. $\mathbf{N}(\phi, \theta) = a^2 \sin\phi\, (\sin\phi \cos\theta,\ \sin\phi \sin\theta,\ \cos\phi), \quad \|\mathbf{N}(\phi, \theta)\| = a^2 \sin\phi$

9. $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t, \qquad \sin^2 t = \dfrac{1 - \cos(2t)}{2}, \qquad \cos^2 t = \dfrac{1 + \cos(2t)}{2}$