Yu.

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

MAT-20401 Vektorianalyysi
Tentti 6.2.2012

Ei laskinta eikä taulukkokirjoja. Kaavaliite on ohessa.

1. Olkoon C_1 käyrä, jolla on parametrisointina $\mathbf{r}(t) = (t, -t^2, 2t^2)$, $-1 \leq t \leq 1$, ja olkoon C_2 jana C_1:n loppupisteestä kohtisuoraan xy-tasolle. Laske

$$\int_C (3x + 2y + z)\, ds,$$

kun $C = C_1 \cup C_2$ (ts. käyrien C_1 ja C_2 yhdiste).

2. Olkoon $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2\mathbf{i} + \dfrac{z^2}{y}\mathbf{j} + 2z \ln y\mathbf{k}$.

a) Määritä $\mathbf{F}$:n potentiaalifunktio.
b) Laske potentiaalifunktion avulla

$$\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}.$$

3. Laske funktion $f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ pintaintegraali yli ruuvipinnan S, jolla on parametrisointina

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} + v\mathbf{k}, \qquad 0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq \pi.$$

4. Laske kentän $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + y\mathbf{j} + e^{xyz}\mathbf{k}$ vuo pinnan

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 = 4,\ 0 \leq z \leq 4\right\}$$

läpi z-akselista poispäin.

Tehtäväkohtaiset tulokset julkaistaan POPissa ja Moodlessa.

MAT-20401 Vektorianalyysi, tentin kaavaliite

1. $\mathbf{r} = (x, y, z), \quad r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \nabla r = \dfrac{\mathbf{r}}{r}, \quad \nabla \cdot \mathbf{r} = 3$

2. $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g$

$\nabla \cdot (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{G} + f(\nabla \cdot \mathbf{G})$

$\nabla \times (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \times \mathbf{G} + f(\nabla \times \mathbf{G})$

$\nabla[h(f(\mathbf{r}))] = h'(f(\mathbf{r}))\nabla f(\mathbf{r})$

3. $$\oint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

4. $$\oint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F}\, dx\, dy$$

5. $$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

6. $$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

7. $$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \implies \quad dx\, dy\, dz = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

8. $\mathbf{N}(\phi, \theta) = a^2 \sin\phi\,(\sin\phi\cos\theta,\ \sin\phi\sin\theta,\ \cos\phi), \quad \|\mathbf{N}(\phi, \theta)\| = a^2 \sin\phi$

9. Massa ja massakeskipiste. Käyrälle C:

$$m = \int_C \delta\, ds, \quad \overline{x} = \frac{1}{m}\int_C x\delta\, ds, \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\int_C y\delta\, ds, \quad \overline{z} = \frac{1}{m}\int_C z\delta\, ds.$$

Pinnalle S:

$$m = \iint_S \delta\, dS, \quad \overline{x} = \frac{1}{m}\iint_S x\delta\, dS, \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\iint_S y\delta\, dS, \quad \overline{z} = \frac{1}{m}\iint_S z\delta\, dS.$$

10. $\sin(2t) = 2\sin t\cos t, \qquad \sin^2 t = \dfrac{1 - \cos(2t)}{2}, \qquad \cos^2 t = \dfrac{1 + \cos(2t)}{2}$