TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

MAT-20401 Vektorianalyysi
Tentti 4.4.2011

Ei laskinta eikä taulukkokirjoja. Kaavaliite on ohessa.

1. **a)** Parametrisoi sylinterin $x^2 + y^2 = 8$ ja tason $x + z = 5$ leikkauskäyrä C ja laske käyrälle jokin tangenttivektori pisteeseen $(2, -2, 3)$.
b) Kappaleen kiihtyvyys ajan t funktiona on $\mathbf{a}(t) = 2t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \cos(2t)\mathbf{k}$. Laske nopeus $\mathbf{v}(t)$ ja paikka $\mathbf{r}(t)$ hetkellä t, kun $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i}$ ja $\mathbf{r}(0) = \mathbf{j}$.

2. Olkoon käyrällä C parametrisointina $\mathbf{r}(t) = (t^2, \sin t, t)$, $0 \le t \le \pi$, ja olkoon $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 \cos z\mathbf{i} + 2xy \cos z\mathbf{j} - xy^2 \sin z\mathbf{k}$. Laske

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

hyödyntämällä $\mathbf{F}$:n potentiaalifunktiota.

3. Laske funktion

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$$

pintaintegraali yli pinnan S, jolla on parametrisointina

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v,\ u \sin v,\ u^2), \qquad 0 \le u \le 2,\ 0 \le v \le \pi.$$

4. Laske kentän $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$ vuo koordinaattitasojen ja tason $x + 2y + z = 2$ rajoittaman tetraedrin reunapinnan läpi tetraedrista poispäin.

Tehtäväkohtaiset tulokset julkaistaan POPissa periodin 2/2010–2011 toteutuskerran sivulla.

MAT-20401 Vektorianalyysi, tentin kaavaliite

$0 - e$

1. **(1)** $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$

(2) $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

(3) $\nabla(\mathbf{F} \bullet \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F}$

(4) $\nabla \bullet (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \bullet (\nabla \times \mathbf{G})$

(5) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \bullet \mathbf{G}) - (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F} - \mathbf{G}(\nabla \bullet \mathbf{F})$

(6) $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g$

(7) $\nabla \bullet (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \bullet \mathbf{G} + f(\nabla \bullet \mathbf{G})$

(8) $\nabla \times (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \times \mathbf{G} + f(\nabla \times \mathbf{G})$

(9) $\nabla[h(f(\mathbf{r}))] = h'(f(\mathbf{r}))\nabla f(\mathbf{r})$

2. $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, \quad \mathbf{n}(t) = \dfrac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}, \quad \kappa(t) = \dfrac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \dfrac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{v^3},$

$a_T = v', \quad a_n = \kappa v^2$

3. $$\oint_{\partial R} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

4. $$\oint_{\partial R} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, ds = \iint_R \nabla \bullet \mathbf{F}\, dx\, dy$$

5. $$\iint_{\partial T} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, dS = \iiint_T \nabla \bullet \mathbf{F}\, dV$$

6. $$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, dS$$

7. $$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \implies dx\, dy\, dz = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

8. $\mathbf{N}(\phi, \theta) = a^2 \sin\phi\, (\sin\phi\cos\theta,\ \sin\phi\sin\theta,\ \cos\phi), \quad \|\mathbf{N}(\phi, \theta)\| = a^2 \sin\phi$

9. $\sin(2t) = 2\sin t \cos t, \qquad \sin^2 t = \dfrac{1 - \cos(2t)}{2}, \qquad \cos^2 t = \dfrac{1 + \cos(2t)}{2}$