TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

MAT-20400 Vektorianalyysi
Tentti 24.11.2008

- Ei laskinta eikä taulukkokirjoja. Kaavaliite on ohessa.
- Kirjoita jokaiseen vastauspaperiin nimesi ja opiskelijanumerosi.
- Jos harjoituspakettisi on periodilta 1/2008–9, niin merkitse päällimmäisen konseptin alkuun "Periodi 1" ja palauta vastauksesi pinoon "Periodi 1".
- Muutoin palauta vastauksesi pinoon "Periodi 2".

1. Olkoon $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = r^2\mathbf{r}$, missä $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ja $r = \|\mathbf{r}\|$.

a) Laske $\nabla(\nabla \bullet \mathbf{F})$.
b) Osoita, että kenttä $\mathbf{F}$ on konservatiivinen ja määritä kentän potentiaalifunktio.

2. Laske kentän $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ käyräintegraali pitkin paraabelia $y = -x^2 + 4x$ pisteestä $(4, 0)$ pisteeseen $(1, 3)$.

3. Laske pinnan S massa, kun S on tason $2x + 3y + 6z = 12$ ensimmäisessä koordinaattikahdeksanneksessa (eli ensimmäisessä oktantissa, jossa $x \geq 0$, $y \geq 0$ ja $z \geq 0$) oleva osa ja pintatiheys on $\delta(x, y, z) = x$.

4. Laske kentän $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ vuo joukon

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \leq z \leq 10 - x^2 - y^2, \ x^2 + y^2 \leq 4\}$$

reunan läpi kappaleesta poispäin. (T:tä rajaavat sylinteripinta, xy-taso ja paraboloidipinta.)

MAT-20400 Vektorianalyysi, kokeen kaavaliite

1. (1) $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$
   (2) $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$
   (3) $\nabla(\mathbf{F} \bullet \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F}$
   (4) $\nabla \bullet (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \bullet (\nabla \times \mathbf{G})$
   (5) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \bullet \mathbf{G}) - (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F} - \mathbf{G}(\nabla \bullet \mathbf{F})$
   (6) $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f \nabla g$
   (7) $\nabla \bullet (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \bullet \mathbf{G} + f(\nabla \bullet \mathbf{G})$
   (8) $\nabla \times (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \times \mathbf{G} + f(\nabla \times \mathbf{G})$
   (9) $\nabla[h(f(\mathbf{r}))] = h'(f(\mathbf{r}))\nabla f(\mathbf{r})$

2. $\displaystyle\int_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$

3. $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_C \mathbf{F} \bullet \mathbf{T}\,ds = \int_C P\,dx + \int_C Q\,dy + \int_C R\,dz$

4. $\displaystyle\oint_{\partial R} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$

5. $\displaystyle\iint_S f\,dS = \iint_R f(\mathbf{r}(u,v))\|\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)\|\,du\,dv$

6. $\displaystyle\iint_S f\,dS = \iint_R f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$

7. $\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\,dS = \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \bullet (\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v))\,du\,dv$

8. $\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\,dS = \iint_R \mathbf{F}(x,y,z(x,y)) \bullet \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right) dx\,dy$

9. $\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\,dS = \iiint_T \nabla \bullet \mathbf{F}\,dV$

10. $\displaystyle\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\,dS$

11. $\displaystyle f(\mathbf{r}) = \int_{A_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$

12. $\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \implies dV = \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

$$\sin(2t) = 2\sin t \cos t \qquad \sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2} \qquad \cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$