MAT-20400 Vektorianalyysi
Tentti 15.5.2008

- **Ei laskinta eikä taulukkokirjoja. Kaavaliite on ohessa.**
- **Kirjoita jokaiseen vastauspaperiin nimesi ja opiskelijanumerosi.**

1. a) Merkitään $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ja $r = \|\mathbf{r}\|$. Laske kentän $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \dfrac{\mathbf{r}}{r^2}$ divergenssi.

b) Laske kentän $\mathbf{F} = z\mathbf{i} - x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ tekemä työ, kun sen vaikutuspiste liikkuu tasolla $z = 1$ pisteestä $(1, 1, 1)$ pisteeseen $(2, 8, 1)$ pitkin käyrää $y = x^3$.

2. Laske pintaintegraali

$$\iint_S \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\, dS,$$

missä S on ruuvipinta, jolla on parametrisointina

$$\mathbf{r}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, v), \quad 0 \le u \le 2,\ 0 \le v \le 2\pi.$$

3. Olkoon T sylinteripinnan $x^2 + y^2 = 4$ ja tason $z = 3$ ensimmäisestä koordinaattikahdeksanneksesta rajaama rajoitettu joukko. Laske kentän

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (6x^2 + 2xy, 2y + x^2z, 4x^2y^3)$$

vuo kappaleen T reunan läpi kappaleesta poispäin.

4. Vastaa vain **joko A- tai B-kohtaan**. (Jätetyistä ratkaisuista huonoin huomioidaan.)

A. Olkoon $\mathbf{F} = (z - y)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$ ja S paraboloidipinta $z = 4 - x^2 + y^2$, $z \ge 0$. Totea Stokesin lauseen

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

paikkansapitävyys tässä tapauksessa laskemalla yhtälön molempien puolien integraalit.

B.

Tarkastellaan seuraavaa Matlab-koodia:

```
syms x y z t real
F=[sin(x)*z,x*y^2,1-y]
r=[t,t^2,t^3]
int(subs(F,[x,y,z],r)*diff(r,t)',t,0,pi)
```

a) Minkä integrointitehtävän koodin suorittaminen ratkaisee? (2 p.)

b) Kirjoita Matlab-koodi tehtävän 2 ratkaisemiseksi (siten, että derivointeja, sijoituksia yms. lasketaan mahdollisimman vähän "käsin"). (4 p.)

MAT-20400 Vektorianalyysi, kokeen kaavaliite

1. (1) $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$

(2) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

(3) $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}$

(4) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$

(5) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F})$

(6) $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g$

(7) $\nabla \cdot (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{G} + f(\nabla \cdot \mathbf{G})$

(8) $\nabla \times (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \times \mathbf{G} + f(\nabla \times \mathbf{G})$

(9) $\nabla[h(f(\mathbf{r}))] = h'(f(\mathbf{r}))\nabla f(\mathbf{r})$

2. $\displaystyle \int_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$

3. $\displaystyle \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds = \int_C P\,dx + \int_C Q\,dy + \int_C R\,dz$

4. $\displaystyle \oint_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$

Pintaint.

5. $\displaystyle \iint_S f\,dS = \iint_R f(\mathbf{r}(u,v))\|\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)\|\,du\,dv$

6. $\displaystyle \iint_S f\,dS = \iint_R f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$

7. $\displaystyle \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS = \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot (\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v))\,du\,dv$

$x = a\cos\theta$
$y = a \cdot \sin\theta$

8. $\displaystyle \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS = \iint_R \mathbf{F}(x,y,z(x,y)) \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right) dx\,dy$

9. $\displaystyle \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F}\,dV$ is equated: $\displaystyle \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F}\,dV \longrightarrow$ Vilo

10. $\displaystyle \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\,dS$

11. $\displaystyle f(\mathbf{r}) = \int_{A_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

$x = \rho\cos\theta$
$y = \rho \cdot \sin\theta$

$= dx\,dy\,dz$

12. $\begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases} \implies \boxed{dV = \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta}$

$dA = r \cdot dr = \rho \cdot d\rho \cdot d\theta$

$\sin(2t) = 2\sin t\cos t \qquad \sin^2 t = \dfrac{1 - \cos(2t)}{2} \qquad \cos^2 t = \dfrac{1 + \cos(2t)}{2}$