MAT-10433 Insinöörimatematiikka C 3u / Hirvonen

Tentti 4.3.2013

Ei laskimia tai kirjallista materiaalia. Kaavakokoelma kääntöpuolella.

Missään tehtävässä pelkän lopputuloksen esittäminen ei riitä, vaan vastauspaperin tulee sisältää päättely, jolla lopputulokseen päädytään.

1. Laske integraali
$$\int_0^1 \frac{-4x^2+2x-2}{(2x+1)^3}dx.$$

2. (a) Suppeneeko seuraava integraali?
$$\int_0^9 \frac{1}{(9-x)^{\frac{3}{2}}}dx$$

   (b) Ratkaise alkuarvotehtävä
$$y' = y\sin x, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3.$$

3. Ratkaise differentiaaliyhtälö
$$y'' - 6y' + 13y = 26x^2 - 11x - 2.$$

4. Suppeneeko sarja? Jos suppenee, onko suppeneminen itseistä?
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(4k-3)}{k^3+2k}$$

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Insinöörimatematiikka 3u
Tentin kaavaliite (periodi 3/2012–2013)

1. Integrointikaavoja

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{ar\,sinh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{ar\,cosh} x + C = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert + C$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{ar\,tanh} x + C = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1} + C$

2. $$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

3. $$s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx, \quad A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx,$$

$$V = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx$$

4. $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

5. Maclaurinin sarjoja:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

6. $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 = 0$:
$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$

(1) yksinkertainen reaalijuuri λ: ratkaisu $e^{\lambda x}$
(2) yksinkertainen imaginaarijuuripari $\lambda = \alpha \pm \beta i$: ratkaisut
$e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ ja $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$
(3) k-kertainen reaalijuuri λ: ratkaisut
$e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$, $x^2e^{\lambda x}, \ldots,$ $x^{k-1}e^{\lambda x}$
(4) k-kertainen imaginaarijuuripari $\lambda = \alpha \pm \beta i$: ratkaisut
$e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots,$ $x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$
$e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots,$ $x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$

7. $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}:\ \mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c},\ X(t) = [\mathbf{v}_1e^{\lambda_1 t}\ \mathbf{v}_2e^{\lambda_2 t}\cdots\mathbf{v}_ne^{\lambda_n t}]$

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$: ratkaisut $\operatorname{Re}\left(\mathbf{v}_1e^{\lambda_1 t}\right)$, $\operatorname{Im}\left(\mathbf{v}_1e^{\lambda_1 t}\right)$