MAT-02450 Fourier'n menetelmät

Tentti 11.3.2015 / Merja Laaksonen

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta

1. Funktio f on määritelty yhtälöillä

$$\begin{cases} f(t) = e^{-t}, & \text{kun } 0 < t < 1, \\ f(t+1) = f(t). \end{cases}$$

Laske määritelmän mukaisesti sille kompleksinen Fourier-sarja.

2. Tehtävänä on rakentaa jaksottomalle funktiolle $f : f(t) = e^{-t}$ sellainen F-sarja, että välillä $t \in (0,1)$ funktio voidaan esittää sinisarjana. Sinun ei tarvitse laskea integraaleja, mutta esitä tarvittavat määrätyt integraalit täsmällisesti sellaisessa muodossa, josta tarvittaessa voisit ne laskea. Jos jonkin arvon näkee laskematta, niin sellaiset tietysti esitetään.
Minkä suorien $y = a$ ja $y = b$ väliin sinisarjan kuvaaja mahtuu niin, että $|a-b|$ on mahdollisimman pieni?

3. Erään otoksen, jossa T=6 ja näytteitä on otettu 0.5:n välein, DFT-jonon alku on

$$\left\{5, 0, \frac{1+j}{3}, 1, 0, -3j, 0, \ldots\right\}.$$

Loppujono oli pyyhkiytynyt pois. Täydennä jonon loppu. Esitä näiden tietojen avulla arvio lähtöfunktiota kuvaavalle sarjalle.

4. Jos

$$G(\omega) = \frac{3}{4+\omega^2} \text{ ja } F(\omega) = \mathscr{F}\Big\{\cos(2t)\Big\}(\omega),$$

niin laske tulon $G(\omega)F(\omega)$ käänteismuunnos ja sievennä tulos reaaliseksi.

Pari muunnosta, joista on apua tai sitten ei:
1. $\mathscr{F}\Big\{1\Big\}(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$ 2. $\mathscr{F}\Big\{e^{-|t|}\Big\}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$

Kaavakokoelma

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$, $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$,

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\Big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big)$, $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big)$,

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big)$.

$$\hat{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\Big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n|\cos(n\omega t + \theta_n)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt, && n = 0,1,2,3,\ldots \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt, && n = 1,2,3,\ldots \\ c_n &= \frac{1}{T}\int_d^{d+T} f(t)e^{-jn\omega t}\,dt, && n = 0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots \end{aligned}$$

$$\frac{1}{T}\int_d^{d+T} f^2(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$$

$$G_n = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-jnk\frac{2\pi}{N}}, \quad n = 0,1,2,\ldots,N-1, \qquad g_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} G_n e^{jnk\frac{2\pi}{N}}, \quad k = 0,1,2,\ldots,N-1.$$

$$\mathscr{F}\{f\}(\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega u}\,du, \qquad \mathscr{F}^{-1}\{F\}(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega.$$

$$\mathscr{F}\Big\{f(at)\Big\}(\omega) = \frac{1}{|a|}F\Big(\frac{\omega}{a}\Big), \quad a \neq 0, \qquad \mathscr{F}\Big\{f'(t)\Big\}(\omega) = j\omega F(\omega)$$

$$\mathscr{F}\Big\{f(t-a)\Big\}(\omega) = e^{-ja\omega}F(\omega), \qquad \mathscr{F}\left\{e^{jbt}f(t)\right\}(\omega) = F(\omega - b)$$

$$\mathscr{F}\Big\{(f*g)(t)\Big\}(\omega) = F(\omega)G(\omega), \qquad \mathscr{F}\Big\{f(t)g(t)\Big\}(\omega) = \frac{1}{2\pi}(F*G)(\omega)$$

$$\mathscr{F}\Big\{\mathscr{F}\{f\}(t)\Big\}(\omega) = \mathscr{F}\Big\{F(t)\Big\}(\omega) = 2\pi f(-\omega), \qquad (f*g)(t) = \int_{\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)\,dx.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$$

$$\hat{F}(\omega) = h\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)e^{-j\omega kh}, \qquad \left\{\hat{F}_n\right\}_{n=0}^{N-1} = \left\{hG_n\right\}_{n=0}^{N-1}.$$