

73035 Insinöörimatematiikka 2

Tentti 17.5.2005 [Ei: M, R, Y eli ei Kimmo Vattulaisen luentoryhmä!]

① Lasken onton putken $\{(x, y, z) \mid 5 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 1 \leq z \leq 6\}$ massa, kun putken theysfunktio on $\rho(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$.

② Millä vakion k arvoilla yhtälöryhmällä (*) on (i) äärettömän määrän ratkaisuja (ii) yksikäsitteinen ratkaisu (iii) ei lainkaan ratkaisuja?

$$(*) \begin{cases} x + kz & = -1 \\ x + y + kz & = 1 \\ x + y + k^2 z & = k \end{cases}$$

3. Olkoot $n \times n$ -matriisit A ja B ei-singulaarisia. Todista determinantin laskulakien ja käänteismatriisin ominaisuuksien avulla oikeiksi yhtäsuunnudet

(i) $\det(B^{-1}AB) = \det(A)$ ja (ii) $\det(\text{adj}(A)) = (\det A)^{n-1}$.
Perustele lyhyesti todistuksen jokainen askel.

4. Esi funktion $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 2xy - z$ kriittisistä pisteistä se, jonka koordinaateista täsmälleen yksi on negatiivinen ja tutki tämän pisteen luonnetta Hessen matriisin avulla.

⑤ Määritä matriisimenetelmällä differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = x(t) - 3y(t) \end{cases}$$

yleinen ratkaisu. Mikä on alkuehdot $x(0) = 5, y(0) = 2$ toteuttava ratkaisu?

73035 Insinöörimatematiikka 2

Tehdävät eri luentoryhmien korvaavien väittentehiin 17.5.2005

6. Todista seuraavista neijomatriiseja koskevista väittämistä ne, jotka pitävät paikkansa ja anna vastaesimerkki niistä, jotka eivät yleisesti pidä paikkaansa.

Väitös 1. Jos $A_{n \times n} B_{n \times n} = 0_{n \times n}$, niin $B_{n \times n} A_{n \times n} = 0_{n \times n}$.

Väitös 2. Jos matriisilla A on käänteismatriisi, myös matriisilla A^T on käänteismatriisi.

Väitös 3. Matriisin $A + B$ käänteismatriisi on $A^{-1} + B^{-1}$.

7. Määritä matriisin $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ välittämän lineaarikuvauksen τ_A

kuva-avaruus $\text{Im}(\tau_A)$. Minkä avaruuden aliavaruus se on ja mikä on sen dimensio?

⑧ Etsi sellainen 3×3 -matriisi C , joka diagonaalisoi matriisin A lävistäjämatriisiksi D , kun

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \\ 16 & -15 & -5 \end{pmatrix}. \text{ Ilmoita myös matriisi } D.$$

⑨ (i) Ratkaise alkuarvotettava $x^3 + (y(x)+1)^2 y'(x) = 0$, kun $y(0) = 2$.
(ii) Ratkaise differentiaaliyhtälö $y''(x) + y'(x) = 1$.

⑩ Mikä on sen lineaarikuvauksen $\tau: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ matriisi, jolle

$$\tau \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{a}, \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{a} \text{ ja } \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{a}, \text{ missä } \mathbf{a} \text{ on vakiovektori.}$$

⑪ Muodosta funktion $\tan(x)$ 2. asteen Taylorin polynomi kehityskeskukseksi $\frac{\pi}{4}$.

⑫ (i) Olkoon

$$B = \begin{bmatrix} \ell & 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ell & -1 \\ 0 & 0 & m & 1 \end{bmatrix}$$

Laske $\det(B)$.

(ii) Jos 4×4 -matriisille A ja B pätee $|A| = 2$ ja $|B| = -9$, niin mitä on $|A^4|$, $|2B|$ ja $|AB|$.