

– Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.

– Kirjoita papereihin nimesi, numeroisi ja konkreettisuitiesi.

1. Valitse seuraavista kolmesta kaavasta se, joka pitää paikkansa, ja todista valitsemasi kaava paikkansa pitäväksi:

$$\sinh^2 x \pm \cosh^2 x = 1, \quad \cosh^2 x \pm \sinh^2 x = 1.$$

2. Henkilö väittää kaavaan sijoittamalla saaneensa imaginaariyksikön  $j$  kolmanneksi juureksi (muunnassa) luvun

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} = w_1.$$

a) Mikä on luvun  $w_1$  vaihekulma eli argumentti?

b) Mikä on luvun  $(w_1)^2 = w_1 w_1$  vaihekulma eli argumentti? Ilmoita se välin  $(-\pi, \pi)$  lukuna sopimuksen mukaan.

c) Farkista kertolaskulla (tai Moivre'n kaavalla), tuleeko luvusta  $(w_1)^3 = w_1 w_1 w_1$  sitä mitä pitäisi eli  $j$ .

3 a) Muodosta ruuviviivan  $\mathbf{f}(t) = (R \cos t, R \sin t, K t)$  pisteeseen  $\mathbf{f}(\pi/4)$  asetetun tangenttisuoran  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{f}(\pi/4) + s \mathbf{f}'(\pi/4)$  yhtälö.

b) Missä pisteessä  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(s_0)$  leikkaa a-kohdan tangenttisuora  $xy$ -tason?

4 a) Olkoon  $f(x, y)$  sellainen funktio, että  $f_x(x, y)$  ja  $f_y(x, y)$  ovat olennossa kaikissa pisteissä  $(x, y)$ . a) Muodosta (kehjüsäännöillä) lausekke derivaatte

$$\frac{d}{dt} f(x, y)$$

b) Olkoon  $f(x, y)$  lisäksi sellainen, että  $f(x, y) = r^m f(x, y)$  kaikilla  $t, n, x:n$  ja  $y:n$  reaalilukuarvoilla (siis niin sanottu  $m$ -nnen asteen homogeeninen funktio). Osoita (a-kohdan tuloksen avulla), että tällöin on

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = m f(x, y)$$

5. Määritä (Lagrange'n keinolla) funktion  $f(x, y, z) = x + y + z$  suurin ja pienin arvo pallolla  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Esitä myös pisteet, joissa nuo arvot saavutetaan.

6 a) Laskke integraali  $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \cos z \, dz \, dx \, dy$ .

b) Kirjoita integraali muotoon  $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \cos z \, dy \, dx \, dz$ . Mikä ovat rajat?

