23530 KONTINUUMIMEKANIIKAN PERUSTEET

1. välikoe 22.2.2000

1. Sievennä oheiset lausekkeet ja kirjoita ne auki siten, että kaikki termit näkyvät erikseen. Kerro minkä kertaluvun tensori kulloinkin on kyseessä. $i, j \to 1, 2$

   a) $\delta_{ij} a_j$ b) $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$ c) $a_{ijk} x_k$

   d) Esitä indeksimuodossa lauseke $\nabla \bullet \mathbf{u}$, missä $\nabla = \left\{ \dfrac{\partial}{\partial x_1} \quad \dfrac{\partial}{\partial x_2} \quad \dfrac{\partial}{\partial x_3} \right\}$.

   e) Tensorien ${}^2\mathbf{A}$, ${}^2\mathbf{B}$ ja ${}^2\mathbf{C}$ alkioita merkitään a_{ij}, b_{ij} ja c_{ij}. Kirjoita Einsteinin summeeraussopimusta käyttäen seuraavan tensorioperaation alkiot näkyviin. ${}^2\mathbf{C} = {}^2\mathbf{A} + {}^2\mathbf{B}$.

2. Olkoon bilineaarioperaattori ${}^2\mathbf{T} = \mathbf{ab}$, missä $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ ja $\mathbf{b} = 3\mathbf{e}_2$. Kanta $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ on ortonormeerattu. Laske tensorin ${}^2\mathbf{T}$ matriisiedustajan alkiot sekä $\operatorname{trace} {}^2\mathbf{T}$.

3. Jännitystilan matriisi on

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sigma$$

Määritä jännitystilan pääjännitykset ja suurinta pääjännitystä vastaava pääsuunta.

4. Jännitystilan matriisi on

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Mikä on tämän jännitystilan jännityksistä vapaan pintaelementin suunta?

Kaavoja: $\sigma_n = \{n\}^{\mathrm{T}}[\sigma]\{n\}$ $\{p_n\} = [\sigma]\{n\}$ $\{\tau_n\} = \{p_n\} - \{\sigma_n\}$

$$l_{i1} = \frac{A_i}{R_i}, \quad l_{i2} = \frac{B_i}{R_i}, \quad l_{i3} = \frac{C_i}{R_i}$$

$$A_i = \begin{vmatrix} \sigma_{22} - \sigma_i & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma_i \end{vmatrix} \quad B_i = -\begin{vmatrix} \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma_i \end{vmatrix} \quad C_i = \begin{vmatrix} \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{22} - \sigma_i & \sigma_{23} \end{vmatrix}$$