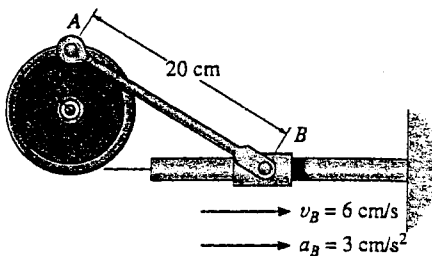


**TME-1200 DYNAMIIKAN PERUSTEET****Tentti 30.10.2006**

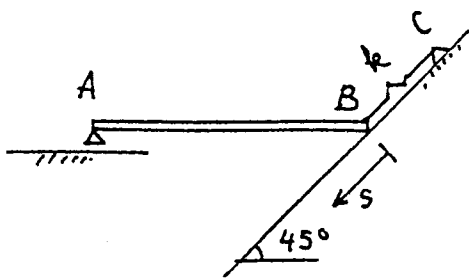
Mukana saa olla yksi A4-kokoinen oma kaavakokoelma molemmin puolin kirjoitettuna ja MAOLin tai Tammertekniikan taulukkokirja.

Vastauspapereihin on kirjoitettava oma nimi, NIMEN SELVENNÖS ja opiskelijanumero sekä tieto, milloin harjoitukset on suoritettu.

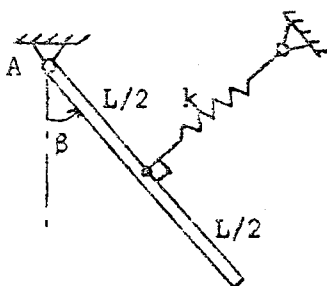
1. Juna lähtee asemalta A, jolloin sen kiihtyvyys on  $1,0 \text{ m/s}^2$  kuuden sekunnin ajan. Tämän jälkeen kiihtyvyys pysyy arvossa  $1,5 \text{ m/s}^2$ , kunnes juna on saavuttanut nopeuden  $12 \text{ m/s}$ . Juna säilyttää vakionopeuden siihen asti, kun se lähestyy opastinta B, jolloin se alkaa jarruttaa tasaisesti pysähtyen kuuden sekunnin aikana. Aikaa matkalle AB kului 40 s. Piirrä junan  $a, t$ - ja  $v, t$ -kuviot ja määritä välimatka AB.



2. Kuvan esittämällä hetkellä luisti B liikkuu oikealle nopeudella  $6 \text{ cm/s}$  ja kiihtyvyydellä  $3 \text{ cm/s}^2$ . Määritä vauhtipyörän kulmanopeus ja kulmakiihtyvyys. Vauhtipyörän säde on  $5 \text{ cm}$ .



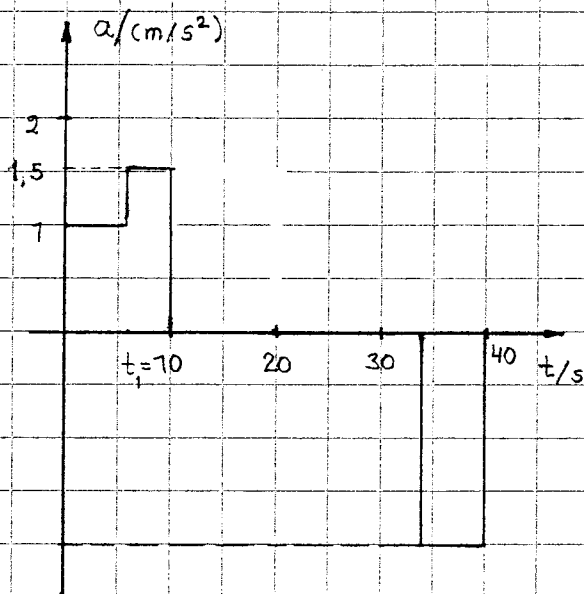
3. Oheinen systeemi on kitkaton. Palkki AB on homogeeninen, suora ja tasapaksu. Sen pituus on  $1 \text{ m}$  ja massa on  $12 \text{ kg}$ . Jousi BC on venymätön ase-massa, jossa palkki on vaakasuora, jousen jousivakio on  $100 \text{ N/m}$ . Palkki päästetään levosta liikkeelle. Kuinka pitkän matkan palkin pää liukuu kaltevalla tasolla, kunnes se pysähtyy? Oletetaan, että B ei pääse irtoamaan tasosta. Mikä on palkin kulmanopeus, kun palkin pää B on liukunut  $0,5 \text{ m}$ ?



4. Ohut, homogeeninen sauva on laakeroitu toisesta päästään A ja tuettu keskikohdastaan kohtisuoralla jousella, jonka jousivakio on  $k$ , siten että tasapaino-asentoa vastaa kulma  $\beta$ . Johda sauvan pienien ominaisvärähtelyjen värähdysajan lauseke.  $J_0 = mL^2/12$ . Sovella tulosta numeroarvoihin
- $$\beta \cong 40^\circ, \quad L = 0,80 \text{ m},$$
- $$m = 5,000 \text{ kg}, \quad k = 200 \text{ N/m}.$$
- $$\sin(\beta + \varphi) = \sin\beta \cos\varphi + \cos\beta \sin\varphi.$$

15. Juna lähtee asemalta A, jolloin sen kiihtyvyys on  $1,0 \text{ m/s}^2$  6 sekunnin ajan. Tämän jälkeen kiihtyvyys pysyy arvossa  $1,5 \text{ m/s}^2$ , kunnes se on saavuttanut nopeuden  $12 \text{ m/s}$ . Juna säilyttää vakionopeuden siihen asti, kun se lähestyy opastinta B, jolloin se alkaa jarruttaa tasaisesti pysähtyen 6 s aikana. Aikaa matkalle AB kului  $40 \text{ s}$ . Piirrä junan  $a, t$ - ja  $v, t$ -kuviot ja määritä välimatka AB.

Vast: 378 m



Järg. ( $\text{m}, \text{s}$ )

$$a = 1 \text{ m/s}^2, t = 0 \dots 6 \text{ s}, v_0 = 0$$

$$\Rightarrow v(t=6 \text{ s}) = at = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 6 \text{ s} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a = 1,5 \text{ m/s}^2, t = 6 \text{ s} - t_1$$

$$v(t_1) = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (a \text{ vakio})$$

$$\Rightarrow 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{12 \text{ m/s} - 6 \text{ m/s}}{t_1 - 6 \text{ s}}$$

$$\Rightarrow 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t_1 - 9 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow t_1 = 10 \text{ s}$$

väli  $t = 34 \text{ s} \dots 40 \text{ s}$

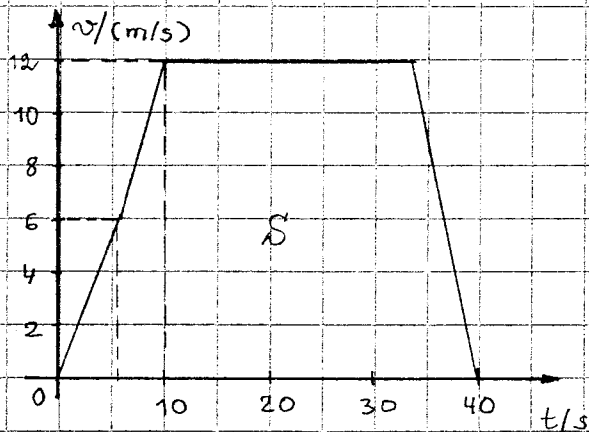
$$\Delta v = 0 - 12 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

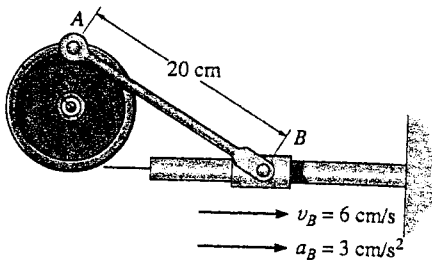
$$a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-12 \text{ m/s}}{6 \text{ s}} = -2 \text{ m/s}^2$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ s} \cdot 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{1}{2} \cdot (6 + 12) \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot (30 + 24) \text{ s} \cdot 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$\Rightarrow$

$$S = 18 \text{ m} + 36 \text{ m} + 324 \text{ m} = 378 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$





2. Kuvan esittämällä hetkellä luisti B liikkuu oikealle nopeudella  $6 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$  ja kiihtyvyydellä  $3 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ . Määritä vauhtipyörän kulmanopeus ja kulmakiihtyvyys.

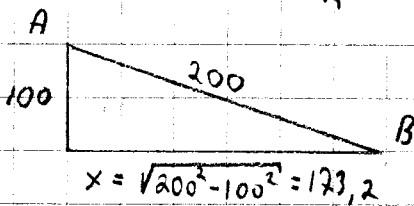
Ratkaisu  $r = 50 \text{ mm}$

$\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B \Rightarrow$  tanko AB on hetkellisessä translaatiossa

$$\omega_{AB} = 0 \text{ ja } v_A = 60 \text{ mm/s} \Rightarrow \omega = \frac{v_A}{r} = \frac{60 \text{ mm/s}}{50 \text{ mm}} = \underline{\underline{1,2 \text{ 1/s}}}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{AB} \times \vec{r}_{A/B}$$

toisaalta  $\vec{a}_A = -\alpha r \vec{i} - \omega^2 r \vec{j}$



$$\vec{r}_{A/B} = -x \vec{i} + 2r \vec{j}$$

$$\Rightarrow -\alpha r \vec{i} - \omega^2 r \vec{j} = 30 \vec{i} + \alpha_{AB} \vec{k} \times (-x \vec{i} + 2r \vec{j})$$

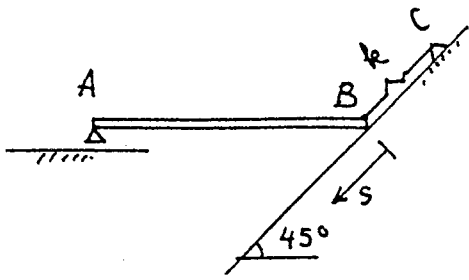
$$-50 \alpha \vec{i} - 72 \vec{j} = 30 \vec{i} - 100 \alpha_{AB} \vec{i} - 173,2 \alpha_{AB} \vec{j}$$

$$\vec{j}: -72 = -173,2 \alpha_{AB} \Rightarrow \alpha_{AB} = 0,4157$$

$$\vec{i}: -50 \alpha = 30 - 100$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 0,231 \text{ 1/s}^2}}$$

3. Oheinen systeemi on kitkaton. Palkki AB on homogeeninen, suora ja tasapaksu. Sen pituus on 1 m ja massa on 12 kg. Jousi BC on venymätön kuvan asemassa, jossa palkki on vaakasuora, jousen jousivakio on  $100 \frac{N}{m}$ . Palkki päästetään levosta liikkeelle. Kuinka pitkän matkan palkin pää liikkuu kaltevalla tasolla, kunnes se pysähtyy? Oletetaan, että B ei pääse irtaamaan tasosta. Mikä on palkin kulmanopeus, kun palkin pää B on liukunut 0,5 m?



Ratkaisu:

Energia säilyy  $T(1) + V(1) = T(2) + V(2)$

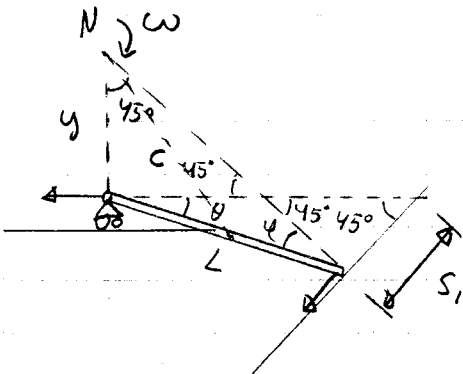
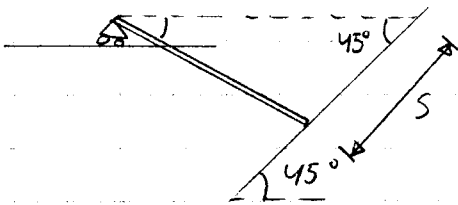
$$T(2) = T(1) = V(1) = 0$$

$$V(2) = \frac{1}{2} k s^2 - mg \frac{1}{2} s \sin 45^\circ = 0$$

$$s^2 - \frac{mg}{\sqrt{2}k} s = 0$$

$$s = \frac{mg}{\sqrt{2}k} = \frac{12 \cdot 9,81}{\sqrt{2} \cdot 100} \text{ m}$$

$$\underline{\underline{s = 0,83 \text{ m}}}$$



$$\frac{L}{\sin 45^\circ} = \frac{s_1}{\sin \theta}$$

$$\sin \theta = \frac{s_1}{L} \sin 45^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 20,7^\circ$$

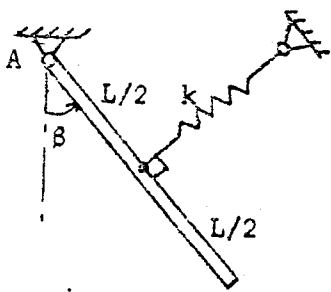
$$\varphi = 180^\circ - 135^\circ - \theta = 45^\circ - \theta = 24,3^\circ$$

$$\frac{y}{\sin \varphi} = \frac{L}{\sin 45^\circ} \Rightarrow y = \frac{\sin \varphi}{\sin 45^\circ} L = 0,582 \text{ m}$$

$$c^2 = y^2 + \frac{1}{4} L^2 - 2y \frac{1}{2} L \cos(90^\circ + \theta) = 0,79 \text{ m}^2 \quad J_N = \frac{1}{12} m L^2 + m c^2 = 10,53 \text{ kg m}^2$$

$$T(3) = \frac{1}{2} J_N \omega^2 \quad V(3) = \frac{1}{2} k s_1^2 - \frac{1}{2\sqrt{2}} mg s_1 = -8,31 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$$

$$T(1) + V(1) = T(3) + V(3) = 0 \quad T(3) = -V(3) \Rightarrow \frac{1}{2} J_N \omega^2 = 8,31 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} \Rightarrow \underline{\underline{\omega = 1,26 \text{ 1/s}}}$$



4. Ohut, homogeeninen sauva on laakeroitu toisesta päästä A ja tuettu keskikohdastaan kohtisuoralla jousella, jonka jousivakio on  $k$ , siten että tasapainoasentoa vastaa kulma  $\beta$ . Johda sauvan pienien omisvärähtelyjen värähdysajan lauseke.  $J_0 = mL^2/12$ .

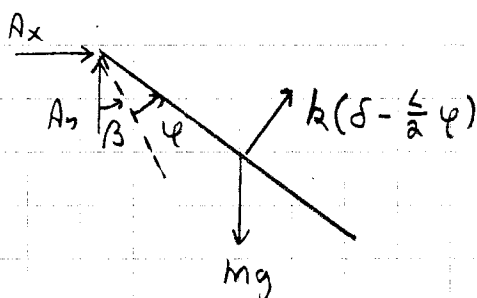
Sovella tulosta numeroarvoihin

$$\beta \hat{=} 40^\circ, \quad L = 0,80 \text{ m},$$

$$m = 5,000 \text{ kg}, \quad k = 200 \text{ N/m}.$$

$$\sin(\beta + \varphi) = \sin\beta \cos\varphi + \cos\beta \sin\varphi.$$

Ratkaisu kulma  $\varphi$  on pieni, jousi pysyy kohtisuorassa sauvaan vastaan



tasapaino:

$$\sum \vec{A} \quad k\delta \frac{L}{2} - mg \frac{L}{2} \sin\beta = 0$$

$$\Rightarrow k\delta = mg \sin\beta$$

$$M_A = J_A \ddot{\varphi} = \frac{1}{3} mL^2 \ddot{\varphi}$$

$$k(\delta - \frac{L}{2}\varphi) \frac{L}{2} - mg \frac{L}{2} \sin(\beta + \varphi) = \frac{1}{3} mL^2 \ddot{\varphi}$$

$$\sin(\beta + \varphi) = \sin\beta \cos\varphi + \cos\beta \sin\varphi \approx \sin\beta + \varphi \cos\beta$$

$$\Rightarrow k\delta \frac{L}{2} - k\varphi \frac{L^2}{4} - mg \frac{L}{2} \sin\beta - mg \frac{L}{2} \varphi \cos\beta = \frac{1}{3} mL^2 \ddot{\varphi} \quad / \cdot \frac{2}{L}$$

$$k\delta - k\varphi \frac{L}{2} - mg \sin\beta - mg \varphi \cos\beta = \frac{2}{3} mL \ddot{\varphi}$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2} \left( \frac{k}{2m} + \frac{g}{L} \cos\beta \right) \varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{3}{4} \frac{kL + 2mg \cos\beta}{mL}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{4mL}{3(kL + 2mg \cos\beta)}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4 \cdot 5 \cdot 0,8}{3(200 \cdot 0,8 + 2 \cdot 5 \cdot 9,81 \cos 40^\circ)}} \quad s = \underline{\underline{0,95 \text{ s}}}$$