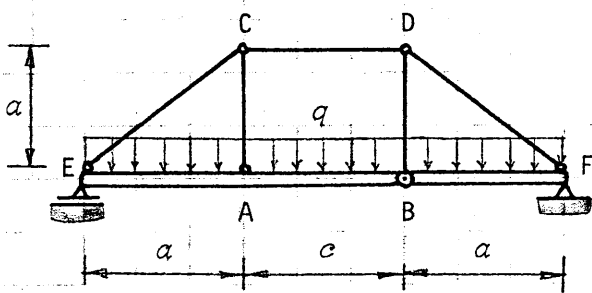
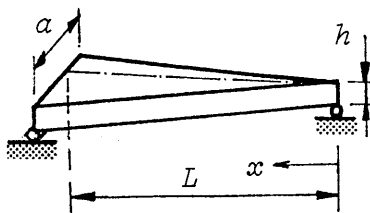


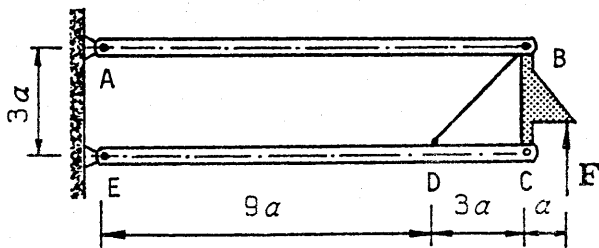
1. Kuvan jyrää, jonka paino  $3,0 \text{ kN}$  ja ulkohalkaisija  $600 \text{ mm}$ , työnnetään nurmikolla. Jyrä pysähtyy kohdattuun kovan  $50 \text{ mm}$  korkean esteen. Laske tarvittava voima  $F$ , kun jyrä a) työnnetään tai b) vedetään hitaasti esteen yli. Kitkaa ja vierinvastusta ei oteta huomioon.



2. Kuvan kävelysiltarakenteen palkissa on kitkaton nivel kohdassa B. Sillalla on tasainen tungoskuormitus  $q$ . Määritä sillan kanteen kiinnitetyn pystysauvan AC rasius. Kaikki nivelet oletetaan kitkattomiksi ja omaa painoa ei oteta huomioon.



3. Palkin poikkileikkauksen korkeus on vakio  $h$ , mutta poikkileikkauksen leveys muuttuu lineaarisesti arvosta  $0$  arvoon  $a$ . Palkkia kuormittaa sen oma paino. Materiaalin massan tiheys on vakio  $\rho$ . Määritä palkin taivutusmomentin maksimiarvo ja kohta, jossa se esiintyy.



4. Määritä kuvan rakenteen venymättömän köyden BD rasius käyttämällä virtuaalisen työn lausetta. Niveleiden kitkaa ja rakennesien omaa painoa ei oteta huomioon.

**KÄÄNNÄ!**

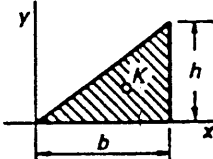
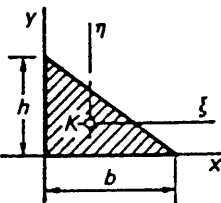
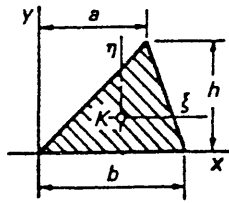
**STATIIKAN PERUSTEET**

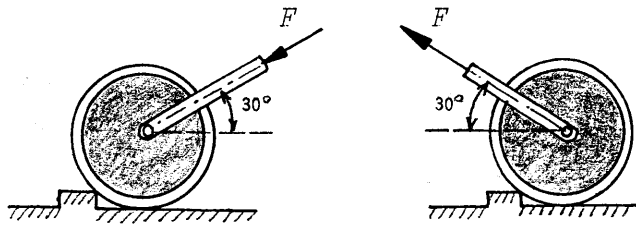
5. Valitse oheisista vaihtoehdoista se yksi, jota pidät parhaimpana:

- (1) Voimasysteemin dynamin saa sellaisenaan siirtää jäykän kappaleen pisteestä toiseen.
- (2) Isostaattisessa ristikossa on aina yhtä monta sauvaa ja niveltä.
- (3) Liikekitkeroin on aina suurempi kuin täysin kehittyneen lepokitkan kitkeroin.
- (4) Jäykkä kappale tasossa on aina tasapainossa, jos se on tuettu kolmen arvoisesti.
- (5) Palkin taivutusmomentti on positiivinen, jos se pyrkii venyttämään palkin positiivisen (y-akselin positiivisen) puolen säikeitä.
- (6) Palkin tasaisen kuormituksen alueella taivutusmomenttipinnan reunakäyrä on suora (lineaarinen).

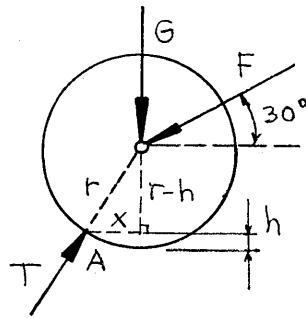
Oikeasta vastauksesta saa +2 pistettä, väärästä -1 pisteen ja vastaamattomuudesta nollan.

**Tasopintojen pintakeskiö**

	Kuvion nimi	Kuvio	Pinta-ala pintakeskiö
1	Suorakulmainen kolmio		$A = bh/2$ $x_0 = 2b/3$ $y_0 = h/3$
2	Suorakulmainen kolmio		$A = bh/2$ $x_0 = b/3$ $y_0 = h/3$
3	Kolmio		$A = bh/2$ $x_0 = (a+b)/3$ $y_0 = h/3$



Kuvan jyrää, jonka paino 3,0 kN ja ulkohalkaisija 600 mm, työnnetään nurmikolla. Jyrä pysähtyy kohdattuun kovan 50 mm korkean esteen. Laske tarvittava voima  $F$ , kun jyrä a) työnnetään tai b) vedetään hitaasti esteen yli. Kitkaa ja vierinvastusta ei oteta huomioon.



Järf. (kN, mm)

$$r = 300, \quad h = 50$$

$$x = \sqrt{r^2 - (r-h)^2} \approx 165$$

a) Jyrää työnnetään:

$$\textcircled{A} +F \cos 30^\circ (r-h) - F \sin 30^\circ \cdot x - Gx = 0$$

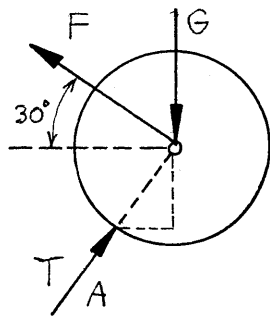
$$\Rightarrow F = \frac{Gx}{(r-h) \cos 30^\circ - x \sin 30^\circ} \approx 3,69 \text{ kN} \leftarrow$$

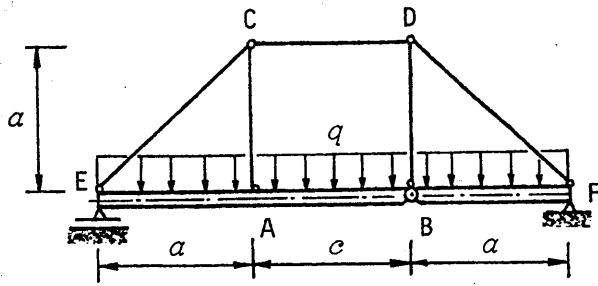
b) Jyrää vedetään:

$$\textcircled{A} +F \cos 30^\circ (r-h) + F \sin 30^\circ \cdot x - Gx = 0$$

$$\Rightarrow F = \frac{Gx}{(r-h) \cos 30^\circ + x \sin 30^\circ} \approx 1,66 \text{ kN} \leftarrow$$

Kannattaa vetää!





Kuvan kävelysiltarakenteen palkissa on kitkaton nivel kohdassa B. Sillalla on tasainen tungoskuormitus  $q$ . Määritä sillan kanteen kiinnitetyn pystysauvan AC rasitus. Kaikki nivelet oletetaan kitkattomiksi ja omaa painoa ei oteta huomioon.

Koko rakenne:

$$\uparrow E_y = F_y = \frac{1}{2} q(2a+c)$$

Leikattu osarakenne:

$$\circlearrowleft (B) + F_y \cdot a + S_{DC} \cdot a - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 0$$

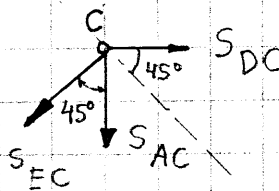
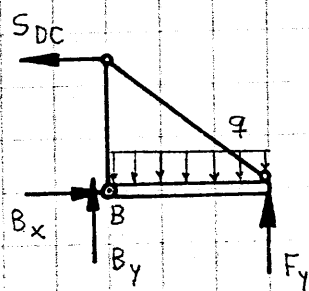
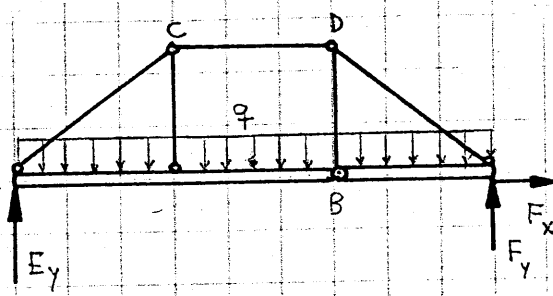
$$\Rightarrow S_{DC} = \frac{qa}{2} - \frac{1}{2} q(2a+c)$$

$$\Rightarrow S_{DC} = -\frac{1}{2} q(a+c)$$

Nivelen C vk-kuva:

$$\searrow + S_{DC} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + S_{AC} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

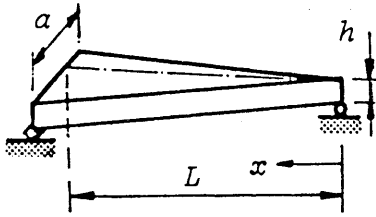
$$\Rightarrow S_{AC} = -S_{DC} = +\frac{1}{2} q(a+c)$$



ESIMERKKI:

Kuvan poikkileikkaukseltaan muuttuvaa palkkia kuormittaa sen oma painovoima. Palkki on vaakasuora ja sen tiheys on  $\rho$ . Määritä palkin leikkausvoiman  $Q(x)$  ja taivutusmomentin  $M_t(x)$  lausekkeet sekä laske taivutusmomentin maksimiarvo ja kohta, jossa se esiintyy.

RATKAISU:



$$\uparrow +T \cdot L - G \cdot \frac{L}{3} = 0$$

$$\Rightarrow T = G/3$$

$$G = \frac{1}{2} \rho g a h L$$

$$x_0 = L/3$$

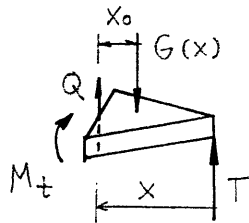
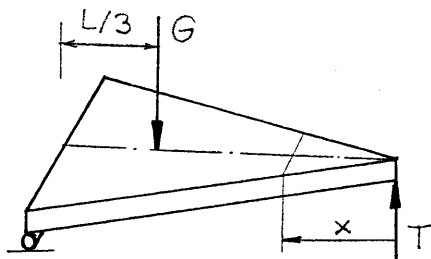
$$G(x) = \frac{1}{2} \rho g \left(\frac{a}{L} x\right) x h$$

$$\Rightarrow G(x) = \frac{1}{2} \rho g \frac{a h x^2}{L} = \left(\frac{x}{L}\right)^2 G$$

$$Q(x) = -T + G = \frac{G}{3} \left[3 \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 1\right] \triangleleft$$

$$\Rightarrow M_t(x) = +T \cdot x - G(x) \cdot \frac{x}{3}$$

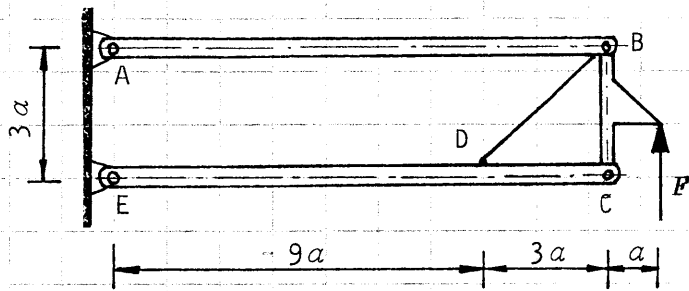
$$\Rightarrow M_t(x) = \frac{x}{3} \left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right] G \triangleleft$$



Taivutusmomentin ääriarvo kohta:  $Q(x_1) = 0$

$$\Rightarrow 3 \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} L \triangleleft$$

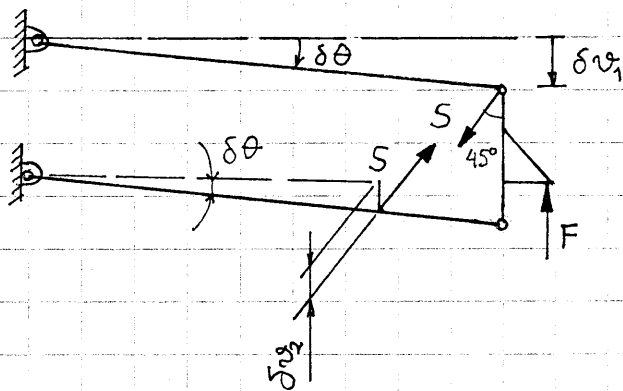
$$\Rightarrow M_{t \max} = M_t(x=x_1) = \frac{1}{3\sqrt{3}} \left[1 - \frac{1}{3}\right] G = \frac{2}{9\sqrt{3}} GL \triangleleft$$



13-16

Määritä kuvan rakenteen köyden BD rasitus virtuaalisen työn periaatteella. Nivelten kitkaa ja omaa painoa ei oteta huomioon.

Annetaan pieni virtuaalinen rotaatio  $\delta\theta$



$$\Rightarrow \delta v_1 = 12a \delta\theta$$

$$\delta v_2 = 9a \delta\theta$$

$$\begin{aligned} \delta W &= -F \delta v_1 + S \cos 45^\circ \delta v_1 - S \cos 45^\circ \delta v_2 \\ &= (-F \cdot 12a + S \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} 12a - S \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 9a) \delta\theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta W = (-12Fa + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} Sa) \delta\theta = 0 \quad \forall \delta\theta$$

$$\Rightarrow -12Fa + \frac{3}{\sqrt{2}} Sa = 0$$

$$\Rightarrow S = 4\sqrt{2} F \approx 5,66 F$$

/.

