

# Tentti (1) MAT-21160 Algoritmimatematiikka

17.5.2006

Kaarakka

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta.

Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja koulutusohjelmasi.

1. (a) (3 pistettä) Tarkastellaan joukkoja  $A$ ,  $B$  ja  $C$ . Osoita, että

$$(A \cup B) \times C \subseteq (A \times C) \cup (B \times C).$$

- (b) (3 pistettä) Tarkastellaan relaatiota  $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}$  joukossa  $\{1, 2, 3\}$ . Onko relaatio  $R$  ekvivalenssirelaatio?

2. Olkoon joukko  $H = \{x : x = n^2 \text{ ja } n \in \mathbb{N}\}$  ja relaatio  $A = \{\langle n, n^2 \rangle : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N} \times H$ .

- (a) (3 pistettä) Vastaa seuraaviin kysymyksiin kyllä/ei:

Onko relaatio  $A$  funktio?

Onko relaatio  $A$  injektio?

Onko relaatio  $A$  surjektio?

- (b) (3 pistettä) Osoita, että joukko  $H$  on numeroituvasti ääretön.

3. Osoita (ilman totuustaulua), että

$$((A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge \neg A) \rightarrow B$$

on pätevä teoria.

4. (a) (4 pistettä) Seuraava todistus, jossa pyritään näyttämään teoria

$$\neg(\forall x (P(x) \wedge Q(x))) \wedge \exists x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \exists x \neg Q(x)$$

päteväksi, on virheellinen. Etsi kaikki kohdat missä todistus menee pieleen ja perustele, miksi näin tapahtuu.

1. $\neg(\forall x (P(x) \wedge Q(x)))$	P
2. $\exists x (P(x) \rightarrow Q(x))$	P
3. $\exists x \neg(P(x) \wedge Q(x))$	1., T
4. $\neg(P(t) \wedge Q(t))$	3., EI
5. $P(t) \rightarrow Q(t)$	2., EI
6. $\neg P(t) \wedge \neg Q(t)$	4., T, De Morgan
7. $\neg Q(t)$	6., Simp.
8. $\exists x \neg Q(x)$	7., EG
M.O.T	1., 2., 8., CP

- (b) (2 pistettä) Muodosta rekursiivinen funktio, joka palauttaa syötteenä annetun listan alkioiden lukumäärän.

KAAVOJA ON PAPERIN TOISELLA PUOLELLA

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

<b>Negaatio</b> $\neg\neg p = p$	<b>Disjunktio</b> $p \vee t = t$ $p \vee e = p$ $p \vee p = p$ $p \vee \neg p = t$	<b>Konjunktio</b> $p \wedge t = p$ $p \wedge e = e$ $p \wedge p = p$ $p \wedge \neg p = e$	<b>Implikaatio</b> $p \rightarrow t = t$ $p \rightarrow e = \neg p$ $t \rightarrow p = p$ $e \rightarrow p = t$ $p \rightarrow p = t$ $p \rightarrow q = \neg p \vee q$ $p \rightarrow q = \neg q \rightarrow \neg p$ $\neg(p \rightarrow q) = p \wedge \neg q$
-------------------------------------	--	--	---

<b>Vaihdantalait</b> $p \wedge q = q \wedge p$ $p \vee q = q \vee p$	<b>Liitântälait</b> $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$	<b>Osittelulait</b> $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
--	---	---

<b>De Morganin lait</b> $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$	<b>Absorptio</b> $p \wedge (p \vee q) = p$ $p \vee (p \wedge q) = p$ $p \wedge (\neg p \vee q) = (p \wedge q)$ $p \vee (\neg p \wedge q) = (p \vee q)$
---	--

Interferenssisääntöjä

<b>MP</b> $\frac{A, A \rightarrow B}{\therefore B}$	<b>MT</b> $\frac{A \rightarrow B, \neg B}{\therefore \neg A}$	<b>Conj</b> $\frac{A, B}{\therefore A \wedge B}$	<b>Simp</b> $\frac{A \wedge B}{\therefore A}$
<b>Add</b> $\frac{A}{\therefore A \vee B}$	<b>DS</b> $\frac{A \vee B, \neg B}{\therefore A}$	<b>HS</b> $\frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{\therefore A \rightarrow C}$	

muista rajoitukset

<b>UI</b> $\frac{\forall x W(x)}{\therefore W(t)}$	<b>UG</b> $\frac{W(t)}{\therefore \forall x W(x)}$	<b>EG</b> $\frac{W(t)}{\therefore \exists x W(x)}$	<b>EI</b> $\frac{\exists x W(x)}{\therefore W(t)}$
---	---	---	---

Ekvivalensseja

$\neg\forall x W(x) = \exists x \neg W(x)$ $\exists x (A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ $\exists x (A(x) \rightarrow B(x)) = \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$ $\exists x \exists y W(x, y) = \exists y \exists x W(x, y)$	$\neg\exists x W(x) = \forall x \neg W(x)$ $\forall x (A(x) \wedge B(x)) = \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ $\forall x \forall y W(x, y) = \forall y \forall x W(x, y)$
---	--

$\forall x (C \vee A(x)) = C \vee \forall x A(x)$ $\exists x (C \vee A(x)) = C \vee \exists x A(x)$ $\forall x (C \rightarrow A(x)) = C \rightarrow \forall x A(x)$ $\forall x (A(x) \rightarrow C) = \exists x A(x) \rightarrow C$	$\forall x (C \wedge A(x)) = C \wedge \forall x A(x)$ $\exists x (C \wedge A(x)) = C \wedge \exists x A(x)$ $\exists x (C \rightarrow A(x)) = C \rightarrow \exists x A(x)$ $\exists x (A(x) \rightarrow C) = \forall x A(x) \rightarrow C$
--	--

Implikaatioita

$\forall x A(x) \rightarrow \exists x A(x)$ $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$ $\exists y \forall x W(x, y) \rightarrow \forall x \exists y W(x, y)$	$\exists x (A(x) \wedge B(x)) \rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x))$
---	--